Universidade de Lisboa

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA NO 9.º ANO DE ESCOLARIDADE

Joana Bárbara Dantas Dias

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO E NO ENSINO SECUNDÁRIO

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada
orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira
e coorientado pela Professora Doutora Maria da Purificação Antunes Coelho

2019

RESUMO

Este relatório foi realizado no âmbito da prática de ensino supervisionada tendo como base o trabalho realizado na unidade de ensino de Trigonometria, com uma turma de 19 alunos do 9.º ano de escolaridade do Colégio Militar. A intervenção letiva decorreu no 2.º Período, ao longo de 13 aulas, das quais oito com duração de 90 minutos e cinco com duração de 45 minutos. Durante esta prática, realizei um estudo em que procurei compreender como é que os alunos resolviam problemas com contextos de semi-realidade, no tema da Trigonometria.

Ao longo das aulas, optei por uma abordagem de ensino exploratório, centrada na atividade dos alunos, recorrendo à diversidade de tarefas, aplicando não só, tarefas de exploração, mas também exercícios, problemas e demonstrações.

A metodologia de investigação utilizada seguiu uma abordagem qualitativa e interpretativa, na qual me posicionei como observadora participante. Para dar resposta ao estudo, recorri ao registo áudio dos momentos de trabalho autónomo dos alunos participantes e ainda ao vídeo da totalidade da aula. Para além disso, foram recolhidas as produções escritas de dois alunos, quer do trabalho em sala de aula, quer dos instrumentos de avaliação aplicados.

A análise de dados evidencia que os alunos utilizaram uma diversidade de estratégias na resolução de problemas, no entanto *utilizar um esboço para a representação do problema* e *utilizar uma equação* foram as heurísticas a que os alunos mais recorreram, e que foram consideradas como facilitadoras para a compreensão do problema. Observou-se ainda que existem estratégias que estão intimamente relacionadas com a fase de resolução do problema em que surgem. Ao longo da desta análise verificou-se que os alunos demonstraram competência estratégica e crítica, sendo que nesta última, é possível constatar uma evolução.

Relativamente às dificuldades e conhecimentos, os alunos foram capazes de resolver problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas, utilizando e aplicando corretamente as razões trigonométricas. No entanto, ao longo deste estudo evidenciaram dificuldades ao nível dos conteúdos anteriormente lecionados, nomeadamente sobre os números e operações.

Palavras-chave: trigonometria; resolução de problemas; estratégias; 9.º ano.

ABSTRACT

This report was carried out in the context of supervised teaching practice based on the work performed in the Trigonometry teaching unit, with a class of 19 students of the 9th year of schooling of the Colégio Militar. The teaching intervention took place in the 2nd period, over 13 classes, eight of which lasted 90 minutes and five lasted 45 minutes. During this practice, I conducted a study in which I sought to understand how students resolved problems with contexts of semi-reality, in the theme of trigonometry.

Throughout the classes, I opted for an exploratory teaching approach, centered on the activity of the students, using the diversity of tasks, applying not only exploration tasks, but also exercises, problems and demonstrations.

The research methodology used followed a qualitative and interpretative approach, in which I positioned myself as a participant observer. To respond to the study, I had the audio record of the autonomous working moments of the participating students and the video of the entire class. In addition, the written productions of two students were collected, both from work in the classroom and from the evaluation instruments applied.

Data analysis shows that students used a variety of strategies to solve problems, however using an outline for the representation of the problem and using an equation were the heuristics to which the students most resorted, and which were considered facilitators for understanding the problem. It was also observed that there are strategies that are closely related to the resolution phase of the problem in which they arise. Throughout this analysis, it was verified that the students demonstrated strategic and critical competence, and in the latter, it is possible to observe an evolution.

Regarding difficulties and knowledge, students were able to solve problems involving trigonometric distances and ratios, using and correctly applying trigonometric ratios. However, throughout this study, there were difficulties concerning the previously taught content, namely on numbers and operations.

Keywords: trigonometry; problem solving; strategies; 9th grade.

AGRADECIMENTOS

Antes de mais quero agradecer à minha orientadora Professora Doutora Hélia Oliveira por todo o apoio, atenção e dedicação neste trabalho. Obrigada por cada crítica e sugestão, não só para o relatório, mas ao longo destes dois últimos anos! Obrigada pelo seu carinho e palavras de incentivo, que tantas vezes foram cruciais ao longo desta caminhada.

À minha coorientadora Professora Doutora Purificação Coelho agradeço por toda a atenção disponibilizada para um maior rigor matemático quer dos conteúdos matemáticos aqui apresentados, quer das aulas lecionadas.

Ao Colégio Militar pela oportunidade que tivemos em fazer parte desta grande escola. A todos os professores e funcionários que tanto nos apoiaram e acarinharam durante todo este ano. Um especial agradecimento à Professora Esmeralda Baleizão por todo o carinho e simpatia demonstrado, por toda a energia, por toda a amizade. Um agradecimento a todos os alunos, em especial à minha turma, por tudo aquilo que me permitiram fazer, pela simpatia, pelo espírito de união demonstrado, por cada momento que ficou guardado.

À professora Anabela Candeias pelo apoio incondicional desde o primeiro momento e durante todo este processo. Obrigada por ter sido bem mais do que uma professora cooperante. Obrigada pela amizade, companheirismo e preocupação. Obrigada por, acima de tudo, ter sido nossa amiga. Foi uma honra ter sido uma das suas meninas.

À minha colega de estágio, Débora Ferrage, por tudo aquilo que foram estes dois anos. Obrigada por todas as palavras de apoio, pela amizade. Foi um privilégio ter feito esta caminhada contigo, partilhando e aprendendo. Fomos, sem dúvida, uma grande dupla.

Aos meus amigos e a todas as pessoas da minha vida que me apoiaram e incentivaram a nunca desistir. À Marisa e à Filipa pelas palavras reconfortantes que tantas vezes me acalmaram e tornaram possível alcançar este sonho. Obrigada a cada uma de vocês e às vossas famílias que me acolheram como se fosse uma de vós. Por me fazerem sentir em casa, quando a minha estava demasiado longe. Por me darem uma mãe, uma avó, uma irmã. Obrigada por tudo, tendo a certeza de que são amizades para a vida.

Por fim, à minha família. Mãe, Pai obrigada por todas as oportunidades que me proporcionaram, pelo apoio que me deram na concretização deste sonho. Por nos terem colocado sempre em primeiro lugar, fazendo com que muitas vezes deixassem de ter as vossas coisas em detrimento das nossas. Sem vocês, nada disto seria possível! Às minhas irmãs, pelo incentivo constante. Obrigada por cada momento, por cada demonstração de carinho, por fazerem os meus dias mais felizes apesar da nossa distância. A ti Roberto, por tudo. Obrigada pelo apoio incondicional, por teres tido a paciência de ler e rever estes textos. Por teres sido um pilar nesta caminhada e acima de tudo, por teres compreendido a minha ausência, mesmo estado presente. A vocês os cinco, obrigada pelo amor sem medida, obrigada por serem a minha vida.

Muito obrigada!

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: Introdução 1
1.1. Motivações pessoais e relevância do estudo 1
1.2. Objetivo e questões de investigação 2
1.3. Organização do relatório 2
CAPÍTULO 2: Enquadramento curricular e didático 5
2.1. A Resolução de problemas 5
2.1.1. O que é um problema em matemática? 5
2.1.2. Resolução de problemas: Etapas e estratégias de resolução 10
2.1.3. Resolução de problemas no ensino e aprendizagem da matemática 15
2.2. A trigonometria e alguns estudos realizados nesse âmbito 19
CAPÍTULO 3: Unidade de Ensino 25
3.1. Contexto Escolar 25
3.2. Ancoragem e organização da unidade de ensino 30
3.3. Conceitos fundamentais da unidade de ensino 34
3.4. Estratégias de ensino e recursos 48
3.5. As tarefas 52
3.6. Avaliação 61
3.7. Aulas lecionadas 64
CAPÍTULO 4: Métodos e procedimentos de recolha de dados 83
4.1. Opções metodológicas 83
4.2. Participantes do estudo 84
4.3. Métodos de recolha de dados 85
4.4. Processo de análise de dados 87
4.5. Questões de natureza ética 88
CAPÍTULO 5: Análise de dados 91
5.1. Problema 14.2 da Tarefa do Manual 91
5.1.1. Alínea a. 92
5.1.2. Alínea b. 95
5.2. Problema 14.4 da Tarefa do Manual 99
5.3. Problema 1 da Ficha de Trabalho n.º 14 105
5.4. Problema 2 da Ficha de Trabalho n.º 15 114

5.5. Problema 5 da Questão-aula 120
5.6. Problema 7 da Ficha de Avaliação 122
CAPÍTULO 6: Conclusões 125
6.1. Síntese do estudo 125
6.2. Principais conclusões do estudo 126
6.3. Reflexão Final 132
REFERÊNCIAS 135
ANEXOS 141

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Quatro tipos de tarefa segundo Ponte (2005). 8
Figura 2 - Estrutura de resolução de problemas de matemática segundo o programa de Matemática de Singapura (citado em Teong et al., 2009). 16
Figura 3 - Código de Honra do Aluno do Colégio Militar....................................... 26
Figura 4 - Classificações dos alunos a Matemática no final do 1.º Período do ano letivo 2018/2019. 28
Figura 5 - Classificações dos alunos a Matemática no final do 2.º Período do ano letivo 2018/2019. 29
Figura 6 - Classificações dos alunos a Matemática no final do 3.º Período do ano letivo 2018/2019. 29
Figura 7 - Classificações dos alunos a Matemática na Prova Nacional de Matemática de 1.º fase do letivo 2018/2019. 30
Figura 8 - Ângulo 35
Figura 9 – Ângulos complementares. 36
Figura 10 - Exemplo de um triângulo. 36
Figura 11 - Altura do triângulo relativamente à base AB. 37
Figura 12 - Triângulo retângulo. 38
Figura 13 - Classificação dos lados de um triângulo retângulo relativamente ao ângulo α. 38
Figura 14 - Teorema de Tales. 39
Figura 15 - Triângulos retângulos com um ângulo interno comum. 40
Figura 16 - Triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ retângulos em B e B′. 42
Figura 17 - Triângulo retângulo em A. 44
Figura 18 - Quadrado de lado 1. 46
Figura 19 - Triângulo de lado 2. 47
Figura 20 - Applet criada para a resolução da Ficha de Trabalho n.º 12. 55
Figura 21 - Enunciado do problema 14.2 do manual adotado. 91
Figura 22 - Representação da alínea a. do problema 14.2, pelo Hélvio. 92
Figura 23 - Resolução da alínea a. do problema 14.2, pelo Hélvio. 93
Figura 24 - Resolução da alínea b. do problema 14.2, pelo Hélvio. 96
Figura 25 - Enunciado do problema 14.4 do manual adotado. 100

Figura 26 - Representação do problema 14.4, pelo Hélvio. 101
Figura 27 - Incógnitas atribuídas pelos alunos no problema 14.4. 102
Figura 28 - Resolução do problema 14.4, pelo Hélvio. 103
Figura 29 – Enunciado do problema 1 da Ficha de Trabalho n.º14. 106
Figura 30 – Resolução da primeira fase no problema 1, pelo Joaquim. 109
Figura 31 - Resolução da segunda fase do problema 1, pelo Joaquim. 111
Figura 32 - Resposta ao problema 1, pelo Joaquim. 112
Figura 33 - Enunciado do problema 2 da Ficha de Trabalho n.º15. 114
Figura 34 - Representação esquemática do problema com atribuição de incógnitas, pelo Joaquim. 115
Figura 35 – Cálculo do valor de x do problema 2, pelo Joaquim. 116
Figura 36 - Cálculo do valor de y e da altura do problema 2, pelo Joaquim. 117
Figura 37 - Resposta ao problema 2, pelo Joaquim. 118
Figura 38 – Enunciado do problema 5 da Questão-aula. 121
Figura 39 – Resolução do problema 5 da Questão-aula, pelo Joaquim. 121
Figura 40 – Resolução do problema 5 da Questão-aula, pelo Hélvio. 122
Figura 41 – Enunciado do problema 7 da Ficha de avaliação. 123
Figura 42 – Resolução do problema 7 da Ficha de avaliação, pelo Joaquim. 123
Figura 43 – Resolução do problema 7 da Ficha de avaliação, pelo Hélvio. 124

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 - Diversos Tipos de Problemas de Aplicação Matemática e a sua Relevância Pedagógica segundo Ponte (1992). 7
Quadro 2 - Plano de resolução de Problemas (adaptado de Schukajlow, Kolrter & Blum - 2015). 11
Quadro 3 - Apoio aos alunos na resolução de problemas segundo Pólya (2003). 12
Quadro 4 - Planificação geral da intervenção letiva 31
Quadro 5 - Classificação de ângulos. 36
Quadro 6 - Classificação de triângulos quanto aos lados. 37
Quadro 7 - Classificação de triângulos quanto aos ângulos. 37
Quadro 8 - Síntese das estratégias e tópicos de aprendizagem mobilizados pelos alunos na resolução do problema 14.2. 99

Quadro 9 - Síntese das estratégias e tópicos de aprendizagem mobilizados pelos alunos na resolução do problema 14.4. 105
Quadro 10 - Síntese das estratégias e tópicos de aprendizagem mobilizados pelos alunos na resolução do problema 1 da Ficha de Trabalho n.º14. 113
Quadro 11 - Síntese das estratégias e tópicos de aprendizagem mobilizados pelos alunos na resolução do problema 2 da Ficha de Trabalho n.º15. 120

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Quadro comparativo entre o aproveitamento e a participação dos alunos. 27
Tabela 2 - Valores exatos de ângulos de amplitudes de referência........................... 48

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo 1 – Significado das notações utilizadas... 143
Anexo 2 – Ficha de trabalho nº 10: Semelhança de triângulos................................ 144
Anexo 2.1 – Ficha informativa: Critérios de semelhança de triângulos. 146
Anexo 3 – Ficha de trabalho nº 11: Razões trigonométricas. 147
Anexo 4 – Ficha de trabalho nº 12: Invariância de razões trigonométricas............ 149
Anexo 5 – Ficha de trabalho nº 13: Relações entre razões trigonométricas. 150
Anexo 6 – Determinar distâncias a locais inacessíveis... 151
Anexo 7 – Ficha de trabalho nº 14: Resolução de problemas................................. 153
Anexo 8 – Ficha de trabalho nº 15: Resolução de problemas na Trigonometria..... 156
Anexo 9 – Ficha de Avaliação Sumativa. 158
Anexo 10 – Questão-Aula.. 162
Anexo 11 – Plano da aula 1 165
Anexo 11.1 – Diapositivos da Aula 1 179
Anexo 12 – Plano da aula 2 184
Anexo 13 – Plano da Aula 3 193
Anexo 14 – Plano da Aula 4 204
Anexo 15 – Plano da Aula 5 215
Anexo 15.1 – Diapositivos da Aula 5 237

Anexo 16 – Plano da Aula 6 245
Anexo 17 – Plano da aula 7 250
Anexo 17.1 – Diapositivos da aula 7 267
Anexo 18 – Plano da aula 7 274
Anexo 18.1 – Diapositivos da aula 8 295
Anexo 19 – Plano da aula 8 303
Anexo 20 – Plano da aula 10 311
Anexo 21 – Plano da aula 11 324
Anexo 22 – Plano da aula 13 335
Anexo 23 – Consentimento Informado 339

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo apresentam-se as motivações pessoais que contribuíram para a realização deste estudo, bem como a pertinência do mesmo. Em seguida, é referido o objetivo do estudo, bem como as questões de investigação inerentes ao mesmo. Por fim, é apresentado sucintamente, a organização realizada no presente relatório.

1.1. Motivações pessoais e relevância do estudo

Após ter conhecimento que iria realizar a Iniciação à Prática Profissional no Colégio Militar, numa turma de 9.º ano de escolaridade, comecei por relembrar aquilo que tinha sido a minha experiência enquanto aluna neste ano de escolaridade. Nesse sentido, havia dois tópicos que tinha especial interesse em lecionar: Probabilidade e Trigonometria. Com a planificação anual da disciplina realizada pelas professoras do colégio, a abordagem do conteúdo sobre probabilidades estava programada para o 1.º Período. Assim, e tendo em conta que a Prática de Ensino Supervisionada teria de ocorrer entre o 2.º e 3.º Período, acabei por escolher o tópico da Trigonometria.

O meu interesse por esses temas decorria essencialmente, por ser possível, através de cada um deles, mostrar a aplicabilidade da matemática em diversas áreas e poder utilizar tarefas com situações práticas, em que os alunos identificassem situações da vida real. Por conseguinte, a escolha relativamente à resolução de problemas com contextos de semi-realidade, surgiu de modo natural. Com vista a melhorar o meu conhecimento sobre a trigonometria e a resolução de problemas e, sobretudo, na sua interligação, fiz uma pesquisa sobre estes temas. O facto de serem poucos os estudos e de fraca diversidade, fez aumentar o interesse por realizar esta investigação.

Por outro lado, considerei ainda, a importância que a resolução de problemas tem nos documentos curriculares em vigor. Segundo o Programa do Ensino Básico de Matemática (MEC, 2013), a resolução de problemas é um dos grandes objetivos da lecionação da disciplina e que deve ser transversal a todas as áreas da matemática. Neste documento, pode ler-se ainda que, deverá ser incutido aos alunos o gosto pela matemática e, para isso, é crucial quer a sua compreensão, quer a resolução de problemas. De forma similar, o *Nacional Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2008) afirma que "a aprendizagem com compreensão é essencial para tornar os alunos capazes de resolver os novos tipos de problemas que, inevitavelmente irão enfrentar no futuro" (p.22). Segundo o documento das Aprendizagens Essenciais (ME,2018) a resolução de problemas é considerada tema e conteúdo de aprendizagem a par com *Números e Operações*, *Geometria e Medida*, *Álgebra* e *Organização e Tratamento de Dados*. Para além de conteúdo, é ainda considerada uma área de competência a ser adquirida pelo aluno.

Por fim, e tendo em conta uma das quatro finalidades da matemática, apresentadas por Swan (2017) - a competência estratégica - achei que poderia ser interessante perceber que estratégias são utilizadas pelos alunos, aliando isso à resolução de problemas.

1.2. Objetivo e questões de investigação

Este estudo, foi desenvolvido, no âmbito da minha prática de ensino supervisionada, com o objetivo de compreender como é que os alunos de uma turma de 9.º ano resolvem problemas com contextos de semi-realidade, no tema da Trigonometria. A intervenção decorreu numa turma de 9.º ano de escolaridade do Colégio Militar, durante o 2.º Período do ano letivo 2018/2019, ao longo de 13 aulas. Com este estudo, pretende-se responder às seguintes questões:

(1) Que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas de trigonometria?

(2) Que conhecimentos e que dificuldades evidenciam os alunos na resolução de problemas de trigonometria?

1.3. Organização do relatório

O desenvolvimento deste relatório é realizado ao longo de seis capítulos. A seguir ao presente capítulo é apresentado o *Enquadramento curricular e didático,* que apoiado em literatura de referência, apresenta-se o enquadramento teórico do estudo.

Este encontra-se dividido em dois grandes tópicos: A Resolução de problemas e a Trigonometria.

No terceiro capítulo, *Unidade de Ensino,* dedicado à apresentação da unidade curricular lecionada, começa-se por fazer uma caracterização do contexto escolar, da Escola e da turma. De seguida, é apresentada a ancoragem da unidade de ensino, tendo em conta o programa de matemática vigente e ainda os conceitos abordados durante a lecionação do tópico da Trigonometria. Por fim, são apresentadas as tarefas, as estratégias, a avaliação e ainda uma breve reflexão de cada uma das aulas lecionadas.

No quarto capítulo, *Métodos e procedimentos de recolha de dados*, é feita uma abordagem às principais opções metodológicas assumidas no trabalho de cariz investigativo. São ainda descritos os participantes do estudo e os instrumentos de recolha de dados, referindo ainda como é que foi realizada a análise dos dados, bem como alguns aspetos de natureza ética atendidos durante o trabalho.

No capítulo 5, *Análise de dados*, apresento uma análise dos dados recolhidos, tendo por base a problemática definida, o objetivo e as questões de estudo. Por fim, no sexto capítulo, *Conclusões,* são apresentadas as principais conclusões deste estudo, procurando dar resposta às questões de investigação formuladas inicialmente. Nesta secção, é ainda realizada uma reflexão pessoal sobre todo o trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CURRÍCULAR E DIDÁTICO

Neste capítulo apresenta-se o enquadramento curricular e didático que suporta o estudo. Este está dividido em dois grandes temas: A Resolução de problemas e a Trigonometria. Relativamente ao primeiro tema começa-se por abordar a definição de problema segundo diversos autores, de seguida explicita-se as etapas e estratégias da resolução de problemas e, por fim, apresenta-se a resolução de problemas no ensino e na aprendizagem da matemática, realçando as orientações dos atuais documentos curriculares sobre o tema. No que concerne ao segundo tema, faz-se um levantamento de alguns dos estudos sobre o ensino e a aprendizagem da Trigonometria que se consideram relevantes para este trabalho.

2.1. A Resolução de problemas

2.1.1. O que é um problema em matemática?

Quando se fala em resolução de problemas, é inevitável questionarmo-nos sobre o que é um problema, que muitas vezes é confundido com exercício. Porém, ainda que este seja um assunto estudado há muitos anos, são tantas as definições, quanto os diferentes autores. De facto, Schoenfeld (1996) refere que "se pedirmos a sete educadores matemáticos para definir resolução de problemas será muito provável obtermos, pelo menos, nove opiniões diferentes" (p.1). Segundo o Schoenfeld (1985), a dificuldade em definir este tipo de tarefa vem da sua subjetividade, uma vez que: "as mesmas tarefas que exigem esforços significativos para alguns alunos, podem ser exercícios de rotina para outros, e respondê-las pode ser apenas uma questão de recordação de um dado matemático (p.74). Nesse sentido o autor refere que a designação que é dada à tarefa decorre do tipo de atividade que o aluno realiza e não propriamente da tarefa em si. A mesma linha de pensamento, é expressa por Ponte e Sousa (2010), quando afirmam que:

> uma dada questão constituirá um problema ou um exercício para um indivíduo, conforme ele disponha, ou não, de um processo que lhe permita resolver rapidamente essa questão. Por isso, num dado momento, uma

> certa questão pode constituir um problema para um certo indivíduo, mas, num outro momento, não passar de um simples exercício (p.30).

Essa mesma ideia é referida pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (1980) que considera também que o termo “resolução de problemas” é abrangente e “que pode significar coisas diferentes para pessoas diferentes ao mesmo tempo e coisas diferentes para a mesma pessoa em momentos diferentes” (p.3).

Mais recentemente, Vale, Pimentel e Barbosa (2015) também distinguem problema “como uma situação que envolve o aluno em atividade, mas para a qual não conhece à partida, ou não é óbvio, um caminho para chegar à solução” (p. 41).

Segundo Schoenfeld (1985) a definição preferida de problema, encontra-se no dicionário inglês publicado pela *Oxford University Press*, um dos mais respeitados dicionários de língua inglesa. No dicionário pode ler-se: “**Problema**: uma pergunta duvidosa ou difícil; uma questão de investigação, discussão ou pensamento; uma pergunta que exercita a mente"(p.74). Em 1991, as normas do NCTM definiram problema da seguinte forma:

> Uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel (NCTM, 1991, p.11).

No Currículo Nacional para o Ensino Básico de 2001, podia ler-se que “os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução” (ME, 2001, p.68).

Em qualquer um dos documentos, a definição de problema está intrinsecamente relacionada com a constituição de um desafio para os alunos. Para além disso, pode observar-se que também fazem referência ao facto de, num problema, existir uma variedade de processos de resolução.

Do ponto de vista de Pólya (1945), um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução. Por outras palavras, é encontrar um caminho desconhecido com vista a atingir um objetivo que é concreto. Afirma também que “a atividade mais carateristicamente humana é a resolução de problemas; pensar com um propósito, imaginar meios para atingir um fim desejado” (citado em Vale, Pimentel e Barbosa, 2015, p.39). Na mesma ordem de ideias, Guimarães (2014) afirma que a resolução de problemas matemáticos como “a atividade matemática que mais se aproxima do fundamental do pensamento do quotidiano” (p. 47).

Para Kantowski (1977), estamos perante um problema quando nos defrontamos com uma questão ou situação que não sabemos resolver, usando os conhecimentos disponíveis no momento. No seguimento da ideia anterior, Lester (1980) afirma que um problema é uma situação cuja estratégia não conhecemos de imediato, mas para a qual existe interesse e se fazem tentativas para resolvê-lo. Segundo Newel e Simon, “um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação” (1972, citado em Santos, 2012, p.10). Já de acordo com Chi e Glaser, “um problema é uma situação na qual um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para tal alguma estratégia em particular” (1983, citado em Santos, 2012, p.10).

Ponte (1992) defende que “um problema consiste numa tarefa para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, mas em cuja solução se empenha activamente” (p.95). Neste documento, Ponte distingue problemas puramente matemáticos e problemas da vida real uma vez que a sua resolução envolve raciocínios distintos. Relativamente aos problemas de vida real, o autor subdivide-os em três tipos (1, 2 e 3), podendo ser distinguidos no seguinte quadro:

Quadro 1 - Diversos Tipos de Problemas de Aplicação Matemática e a sua Relevância Pedagógica segundo Ponte (1992).

Tipo	Escala de Tempo	Relevância Pedagógica	Foco
1	Vários problemas numa só aula	Ilustração duma aplicação ou exemplo importante	Matemática
2	Um problema de 1 a 5 aulas	Ilustração de como uma mesma situação pode ser estudada de mais de uma maneira	Situação/ Matemática
3	Uma atividade que se estende por várias semanas	Criação, invenção e descoberta	Processo de matematização e modelação

Os problemas do tipo 1 representam as situações do mundo real, e são questões que têm uma solução simples, com informação suficiente, ou por vezes em excesso, e que podem ser utilizados quando os alunos já adquiriam conhecimentos necessários para a sua resolução. Os *problemas do tipo 2*, são também uma situação do mundo real, mas que contrariamente aos do tipo 1, podem ser resolvidos de diversas formas e utilizando diversas técnicas matemáticas. Finalmente, os *problemas do tipo 3*, são "investigações abertas cuja exploração pode levar um tempo considerável e seguir um de muitos caminhos (…), podem representar actividades e experiências de aprendizagem muito diversas" (p. 100).

Também Skovsmose (2000) distingue tarefas tendo em conta o seu contexto: matemático, de semi-realidade e de vida real. Segundo o autor, quando uma tarefa é de contexto matemático, refere-se apenas e só à matemática dita "pura". Quando o seu contexto é de realidade, os alunos contatam com tarefas que os levam a situações da sua vida quotidiana. A referência à semi-realidade, é um meio termo das duas anteriores. Segundo o autor, num contexto de semi-realidade, estamos na presença de uma situação que é artificial, ou seja, uma realidade que é construída e que não é de facto, observável. No entanto, "pode ser uma referência que oferece suporte para alguns alunos na resolução do problema" (p.126). Para além disso, existem algumas condições características deste tipo de contexto, nomeadamente o facto de este ser totalmente descrito pelo texto da tarefa e de que nenhuma outra informação ou mais informações sejam consideradas irrelevantes para a sua resolução.

Ponte (2005) define tarefa tendo em conta a sua dificuldade, a sua estrutura, contexto e o tempo necessário para a sua resolução. Tendo em conta os dois primeiros aspetos, é possível obter quatro diferentes tipologias, como é possível observar na figura seguinte (Figura 1). Da análise da figura, um problema é uma tarefa com desafio elevado, mas com uma estrutura fechada, "onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido" (Ponte, 2005, p. 7-8).

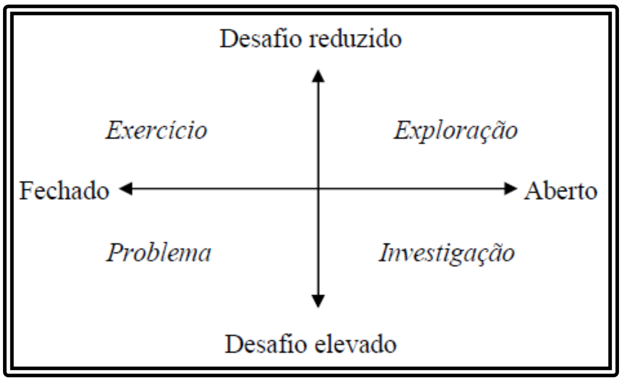


Figura 1 - Quatro tipos de tarefa segundo Ponte (2005).

Alguns autores para além da definição de problema, tiveram especial atenção em tipificá-los, tal como já foi visto anteriormente com a distinção entre problemas puramente matemáticos e problemas com contexto de realidade e semi-realidade. Pólya (1995) classificou os problemas de quatro maneiras distintas:

(1) *problemas rotineiros* – um problema é considerado rotineiro quando puder ser resolvido por substituição dos dados de outro problema idêntico.

(2) *Problemas auxiliares* – um problema é considerado auxiliar quando é utilizado como um meio para obter resposta do problema principal.

(3) *problemas de determinação* – um problema designa-se de determinação quando tem como objetivo encontrar uma dada incógnita que satisfaça a condição do mesmo.

(4) *problemas de demonstração* – nestes problemas, o objetivo é mostrar se uma determinada afirmação é verdadeira ou falsa.

(5) *problema práticos* – nos problemas práticos, não é necessário qualquer conhecimento especial para que este seja compreendido.

No trabalho de Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) podemos distinguir três tipos de problemas: *problemas de cálculo,* que estão diretamente relacionados com as operações que têm de ser realizadas para obter a solução; *problemas de processo,* diferem dos anteriores na medida em que não podem ser resolvidos apenas utilizando operações aritméticas e que, segundo os autores, "requerem um maior esforço para compreender a Matemática necessária para chegar à solução" (p. 19); e, por fim, *problemas abertos,* que podem igualmente ser designados por investigações e que têm a particularidade de "ter mais do que um caminho para chegar à solução e mais do que uma resposta correcta" (p. 20).

Borasi (1986) diferencia sete tipo de problemas a partir da análise de quatro elementos estruturais: o contexto do problema, a formulação, as estratégias e as suas soluções. São eles: *exercícios,* onde não existe contexto, têm formulação e solução única e as estratégias de resolução são conhecidas; *problemas de palavras,* com os mesmos critérios do anterior, mas com um contexto explicito no texto do problema; *problemas puzzle:* com as características dos problemas de palavras, mas que a estratégia de resolução envolve uma "ideia luminosa"; *problemas que consistem na* *prova de uma proposição ou conjectura*: neste tipo de problemas o contexto é conhecido, sendo necessário o conhecimento de algumas teorias, a sua formulação é única e embora hajam diversas estratégias, a solução é única; *problemas de vida real*, onde o contexto e a formulação não são claros, passando pela necessidade de explorar o seu contexto de forma a obter informações complementares, nestes problemas não existe uma única solução, mas sim várias que devem ser confirmadas e validadas; *situações problemáticas*, onde o contexto é pouco explícito, necessitando de ser explorado uma vez que é problemático e com formulação vaga, existindo várias possibilidades para a solução; *situações ainda não problemáticas*: o contexto é pouco explicito mas não é problemático, não existe formulação e a sua estratégia de resolução passa pela formulação de novos problemas.

É possível reparar que esta tipologia apresentada por Borasi (1986) é consideravelmente diferente das referidas até então. Enquanto que nas anteriores, o foco era no individuo, aqui o facto de ser um problema é independente do individuo ou da sua experiência.

2.1.2. Resolução de problemas: Etapas e estratégias de resolução

O momento de resolução de problemas é considerado, segundo Krulik e Rudnick um "processo sequencial onde se estabelecem diversas fases" (1993, p.3). Para Schoenfeld (1985), as fases são apresentadas através de um fluxograma onde são indicadas as principais etapas do processo de resolução de problemas: (1) análise; (2) projeto; (3) exploração; (4) implementação; e (5) verificação. Segundo o autor a utilização destas etapas, é o comportamento mais sistemático dos bons solucionadores de problemas. No estudo de Depaepa, De Corte e Verschaffel (2010) sobre as abordagens metacognitivas e heurísticas dos professores na resolução de problemas, utilizaram no ambiente de aprendizagem um modelo geral para resolver problemas que consistia também em cinco etapas: (1) criar uma representação mental do problema; (2) decidir como resolver o problema; (3) executar os cálculos necessários; (4) interpretar o resultado e formular a resposta; e (5) avaliar a solução.

Também Schukajlow, Kolter e Blum (2015) referem-se a um plano de solução como um fator de desenvolvimento da organização e elaboração de estratégias. Para os autores, o seu modelo é dividido em quatro fases, sendo elas: (1) compreender o problema; (2) pesquisar matemática; (3) usar matemática; e (4) explicar os resultados.

Para cada uma das fases, os autores indicam indagações e sugestões típicas que podem orientar os alunos em cada uma das fases (Quadro 2).

Quadro 2 - Plano de resolução de Problemas (adaptado de Schukajlow, Kolrter & Blum - 2015).

Fase		**Orientações**
1	Compreender o problema	- Leia o texto com precisão. - Imagine a situação. - Faça um esboço.
2	Pesquisar matemática	- Procure os dados necessários e, se necessário, faça suposições. - Procure relações matemáticas.
3	Usar matemática	- Tem conhecimento sobre o conteúdo? Use-o. - Se não funcionar: Conhece outros procedimentos matemáticos?
4	Explicar os resultados	- Complete adequadamente o seu resultado. - Relacione o seu resultado à tarefa e verifique se é adequado. - Anote a sua resposta final.

Apesar de existirem vários autores com diferentes modelos de resolução de problemas, o modelo de Pólya (1945) continua a ser uma referência e foi adotado no presente estudo. Este matemático propõe um modelo para resolver problemas que passa por quatro fases fundamentais: (1) compreensão do problema; (2) elaboração de um plano; (3) execução do plano; e por fim, (4) verificação dos resultados.

A primeira fase é considerada a mais importante na resolução de um problema, na medida em que as fases seguintes estão inteiramente dependentes desta. Segundo Pólya (2003), "é uma tolice responder a uma pergunta que não se tenha compreendido" (p.28). É nesta fase que o aluno deve interpretar o enunciado: identificando os dados do problema, bem como aquilo que se pretende determinar. Na fase 2, o aluno deverá delinear a estratégia a seguir com o intuito de atingir o resultado esperado, relacionando os dados do problema com aquilo que se pretende determinar. Pólya (2003) afirma que existe um plano, quando temos uma ideia de cálculos ou construções que temos de utilizar para obter a resposta ao problema. O autor considera ainda que esta é uma fase de extrema dificuldade, pois essa tal ideia "pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas aparentemente infrutíferas e um período de hesitação" (p. 30). *A terceira fase* é a da implementação do plano delineado na fase anterior, com o objetivo de chegar à solução pretendida. Nesta fase é essencial que o aluno vá verificando todos os passos da sua resolução, com o intuito de perceber se a estratégia utilizada é ou não a mais correta. Na fase final, os alunos deverão verificar os resultados obtidos de forma a proceder à validação da solução obtida. Espera-se que os alunos sejam críticos, capazes de refletir e de questionar se a resposta tem sentido ou não. Segundo Pólya (2003) "uma revisão da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que conduziu até este, poderão consolidar os seus conhecimentos e desenvolvem a capacidade de resolver problemas" (p.36).

De forma a orientar cada uma das fases, o autor considerou ser importante criar uma lista com sugestões típicas e úteis para trabalhar a resolução de problemas com os alunos (Quadro 3).

Quadro 3 - Apoio aos alunos na resolução de problemas segundo Pólya (2003).

Primeiro	**Compreensão do problema**
É preciso compreender o problema	*Qual a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição?* É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condição. É possível escrevê-las?
Segundo	**Elaboração de um plano**
Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas	Já viu o problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob forma ligeiramente diferente? *Conhece um problema relacionado com este?* Conhece um problema que lhe pode ser útil? *Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo?* É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua resolução?

auxiliares se não puder encontrar	É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? É possível obter dos dados alguma coisa útil? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?
Terceiro	**Execução do plano**
Execute seu plano	Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
Quarto	**Verificação dos resultados**
Examine a solução obtida	É possível *verificar o resultado?* É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*

Swan (2017) refere que as finalidades do ensino da matemática são diversas. Estuda com maior destaque, a *fluência processual, a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica.* Segundo o autor, a resolução de problemas está inteiramente relacionada com a competência estratégica, sendo esta a "capacidade dos alunos para resolverem problemas não rotineiros de várias etapas, e estender essa capacidade à formulação de problemas do mundo real" (p. 70). Dos modelos referidos anteriormente, é evidente a noção de estratégia associada à resolução de problemas, o que acaba por corroborar a afirmação do autor.

Para o desenvolvimento desta estratégia os alunos deverão estar à vontade para experienciar uma diversidade de abordagens, não podendo o professor exigir que estes adotem uma em particular (Swan, 2017). Relativamente à fluência processual, é utilizada "a metáfora do estudo, a nível da música, para mostrar como a fluência pode ser desenvolvida através do envolvimento na resolução de problemas atraentes e matematicamente satisfatórios" (Foster citado por Swan, 2017, p. 68). Assim, é indispensável que os alunos desenvolvam estratégias de resolução que possam ser aplicadas a qualquer problema.

Schoenfeld (1985) afirma que “as estratégias heurísticas são regras de ouro para resolver problemas com sucesso, sugestões gerais que ajudam um individuo a perceber melhor o problema ou a fazer progressos de modo a atingir a solução” (p.23). Para este autor, as noções de heurística e estratégia são, por vezes, sinónimas, na medida em que no mesmo documento o autor refere-se a estratégia como “a forma ideal de resolver problemas ou o comportamento sistemático dos indivíduos que resolve problemas de forma eficaz” (p.107). De igual modo, o NCTM (2008) demonstra também usar, de forma sinónima, as noções de heurísticas e estratégias, afirmando que os alunos “deverão ter boas oportunidade para desenvolver um repertório vasto de estratégias de resolução de problemas (ou heurísticas)” (p.395).

As estratégias de resolução são “ferramentas que, a maior parte das vezes, se identificam com processos de raciocínio e que podem ser bastante úteis em vários momentos do processo de resolução de problemas” (Boavida et al., 2008, p.23). Nesse sentido, servem para auxiliar os alunos a “atacar o problema ou a caminhar no sentido de obter a solução” (p. 22).

De seguida é apresentado um conjunto de estratégias selecionado de acordo com o que pareceu à partida poder ser mais provável surgir na resolução dos alunos neste estudo, tendo em conta o tipo de tarefas propostas e que se baseiam nas estratégias heurísticas mencionadas por Pólya (1945), Schoenfeld (1985) e Fan e Zhu (2007).

(1) *Assinalar dados importantes* – identificar os dados do problema, optando por sublinhar, reescrever ou utilizar pessoas ou objetos que melhor descrevam a situação (adaptado de Fan & Zhu, 2007).

(2) *Utilizar um esboço* – recorrer a desenhos que representem a situação como estratégia para visualizar e melhor interpretar o problema (Fan & Zhu, 2007; Schoenfeld, 1985).

(3) *Utilizar uma equação* – recorrer a uma equação para obter a resposta ao problema, utilizando a ideia ou termos “é” e/ou “é igual a” (Fan & Zhu, 2007).

(4) *Introduzir elementos auxiliares* – Acrescentar dados ou incógnitas para resolver o problema de forma mais acessível ou de diferentes maneiras (Schoenfeld, 1985).

(5) *Pensar num problema relacionado* – utilizar métodos e/ou resultados de um problema relacionado, ou recuperar um problema relacionado, ou ainda considerar um problema semelhante resolvido anteriormente, a fim de resolver o problema apresentado (Fan & Zhu, 2007; Pólya, 1945; Schoenfeld - 1985).

(6) *Reescrever o problema* – reformular o problema original para que o seu enunciado se torne familiar e, portanto, mais acessível (Fan & Zhu, 2007).

(7) *Simplificar o problema* – alterar números ou situações complexas no problema para números ou situações mais simples, sem alterar matematicamente o problema (Fan & Zhu, 2007).

(8) *Resolver por partes* – dividir o problema em vários subproblemas, resolvendo-os um a um e finalmente resolvendo o problema original (Fan & Zhu, 2007; Pólya, 1945; Schoenfeld,1985).

(9) *Identificar um padrão* – Reconhecer características comuns, procurar regularidades ou diferenças presentes nos parâmetros do problema (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985).

Segundo o NCTM (2008), diversos estudos evidenciam que as estratégias mais recorrentemente utilizadas pelos alunos na resolução de problemas são:

> A utilização de esquemas, a identificação de padrões, a listagem de todas as possibilidades, a experimentação com valores ou casos particulares, o trabalho do fim para o princípio, a tentativa e erro, a criação de um problema equivalente e a simplificação do problema (p. 59).

Pode reparar-se que algumas destas estratégias não são apresentadas na listagem anterior e isso deve-se ao facto de estas não estarem relacionadas com a resolução de problemas no tópico da Trigonometria. No entanto, algumas das estratégias aqui apresentadas, foram aplicadas pelos alunos nas tarefas de demonstração, nomeadamente a experimentação com valores ou casos particulares ou o trabalho do fim para o início.

2.1.3. Resolução de problemas no ensino e aprendizagem da matemática

Em alguns países, como é o caso de Singapura, a resolução de problemas matemáticos está no cerne do programa de matemática. Tal como se encontra expresso na figura 2, para resolver com êxito vários tipos de problemas, o aluno precisa aplicar quatro tipos de competências matemáticas, nomeadamente, conceitos matemáticos específicos, capacidades, processos e metacognição. Para além destas, acrescentam ainda as atitudes (Teong et. al., 2009).

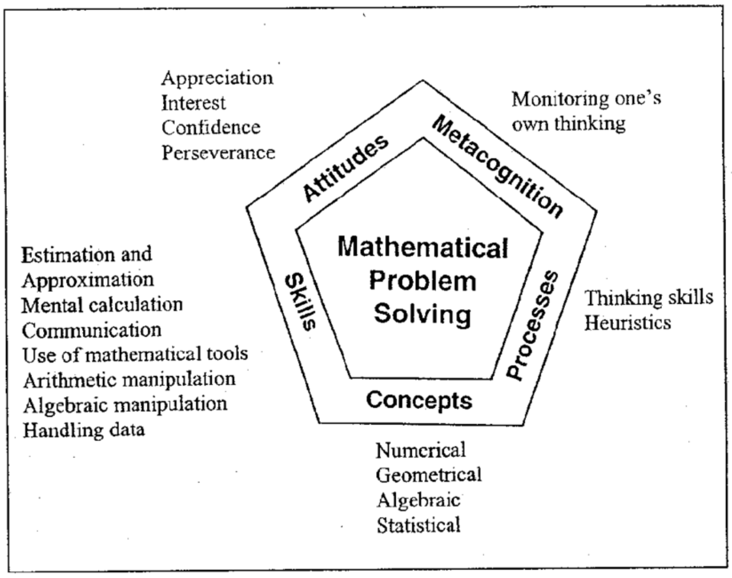


Figura 2 - Estrutura de resolução de problemas de matemática segundo o programa de Matemática de Singapura (citado em Teong et al., 2009).

Segundo a figura anterior, os conceitos são relativos aos conhecimentos numéricos, geométricos, algébricos e estatísticos. Relativamente às capacidades, os alunos deverão ser capazes de estimar e aproximar, realizar cálculo mental, comunicar matematicamente, utilizar ferramentas matemáticas, manipulação aritmética, algébrica e de dados. No que concerne à metacognição, os alunos deverão ser capazes de monitorizar o seu próprio pensamento; e ao nível dos processos, deverão ter habilidade para pensar em estratégias de resolução. Por fim, deverão demonstrar apreciação, interesse, confiança e perseverança ao nível das suas atitudes.

Em Portugal, a resolução de problemas, segundo o anterior programa de matemática, é tida como capacidade fundamental, a par do raciocínio matemático e da comunicação matemática (Oliveira & Borralho, 2014). Atualmente, segundo as Aprendizagens Essenciais (ME, 2018), a resolução de problemas é considerada como uma competência e como um conteúdo de aprendizagem, sendo necessário que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas em situações de maior complexidade e que mobilizem novas aprendizagens nos diversos domínios, aprofundando a análise de estratégias, tendo uma atitude crítica, e formulando problemas em contextos variados. No programa vigente é possível ler-se que:

> A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (…) Embora os alunos possam começar por apresentar estratégias de resolução mais informais, recorrendo a esquemas, diagramas, tabelas ou outras representações, devem ser incentivados a recorrer progressivamente a métodos mais sistemáticos e formalizados.
>
> (ME, 2018, p.5)

Segundo Abrantes (1989), a resolução de problemas é vista como a força motora quer do desenvolvimento da Matemática como da própria atividade matemática, e como tal "não é por isso de estranhar que a actividade de Resolução de Problemas constitua uma importante orientação curricular para o ensino desta disciplina" (Ponte, 1992, p.95). Deste modo, o documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) refere que a resolução de problemas não deve ser tratada como parte isolada do programa de Matemática, devendo, por isso, ser integrada em toda a aprendizagem da Matemática.

Neste sentido, o documento propõe que os alunos estejam preparados para:

- construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;
- resolver problemas que surgem em matemática e de outros contextos;
- aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;
- analisar e refletir sobre o processo de resolução matemática de problemas.

(NCTM, 2008, p. 57)

Ainda neste documento pode ler-se que a resolução de problemas poderá ser útil para os alunos fora da aula de matemática, ou seja, na sua vida quotidiana e no trabalho, na medida em que os alunos irão "adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas" (NCTM, 2008, p.57).

Boavida et al. (2008) salientam também a importância da resolução de problemas para os alunos, uma vez que esta:

> (1) Proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação; (2) Fomenta o raciocínio e a justificação; (3) Permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares; (4) Apresenta a Matemática como uma

> disciplina útil na vida quotidiana” (p.14).

No entanto, segundo Guimarães (2005), a resolução de problemas é uma das “áreas nas quais o desempenho dos nossos alunos está longe de ser satisfatório” (p.23). O NCTM (2008) revela que “geralmente, o insucesso dos alunos, aquando da resolução de problemas, não se deve à falta de conhecimentos matemáticos, mas antes à deficiente utilização dos mesmos (NCTM, 2008, p. 60). A interpretação do enunciado do problema, nomeadamente ao nível da leitura e a escolha da estratégia de resolução representam algumas das grandes dificuldades dos alunos. Carvalho e Ponte (2014) consideram que a interpretação do enunciado é crucial para o aluno siga uma estratégia que o leve ao resultado correto. Na mesma ordem de ideias, Brito (2008) refere que “alguns alunos em Matemática leem o enunciado de um problema seguindo com os olhos (da esquerda para a direita) as palavras à procura de um número (“logicamente, a aula é de Matemática e não de Português”)” (p. 41).

Quando os alunos demonstram estas dificuldades em compreender aquilo que se pretende, o professor sente necessidade de intervir, promovendo a interpretação coletiva e procurando ajudar os seus alunos a encontrar uma estratégia (Carvalho & Ponte, 2014). Em contrapartida, o professor deverá ter a preocupação de apenas conduzir o aluno nessa descoberta, sendo o aluno o principal impulsionador, devendo fazer o máximo por si mesmo (Guimarães, 2014). Deste modo, os alunos deverão desenvolver a capacidade de resolver problemas autonomamente.

Para Pólya (2003) o professor deverá conseguir achar um meio termo, sendo capaz de ajudar os alunos, sem retirar-lhes o papel principal.

> O estudante deve adquirir tanta experiência de trabalho independente quanta for possível. Mas se for deixado sozinho com um problema, sem qualquer ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não faça qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve ajudar, nem de mais nem de menos, mas de tal forma que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho (p. 23).

Segundo Hatfield (1978) o ensino da resolução de problemas pode ser tipificado de três maneiras: (1) o ensino *acerca* da resolução de problemas, onde o professor utiliza um modelo de aulas, chamando à atenção dos alunos para certas etapas e estratégias; (2) o ensino *para* a resolução de problemas, onde se analisa o processo de resolução dos alunos, destacando conceitos e técnicas; e por fim (3) o ensino *através* da resolução de problemas, onde se ensina a matéria através de situações problemáticas, ou seja, através de problemas.

Em qualquer um dos ensinos, os professores deverão colocar os alunos em contacto com uma grande variedade de situações, promovendo a resolução, a exploração, investigação e discussão de problemas, algo fundamental para a aprendizagem significativa no ensino da Matemática (Abrantes, 1989).

Ponte e Serrazina (2000) salientam a importância das decisões que um professor toma na implementação de uma metodologia de ensino baseada na resolução de problemas, referindo que "a resolução de problemas ajuda a desenvolver a compreensão das ideias matemáticas e a consolidar as capacidades aprendidas e, por outro lado, constitui um importante meio de desenvolver novas ideias matemáticas" (pp.55-56).

Por fim, o NCTM (2008) considera o ensinar, uma atividade de resolução de problemas, que se traduz num grande desafio para os professores.

> A resolução de problemas, com sucesso, exige o conhecimento de conteúdos matemáticos, de estratégias de resolução de problemas, a capacidade de auto regulação, e uma predisposição para a colocação e resolução de problemas. O seu ensino exige ainda mais dos professores, uma vez que estes devem ser capazes de criar estes conhecimentos e atitudes nos alunos. Uma parte significativa da responsabilidade do professor consiste no planeamento de problemas através da sua exploração, e de aprender e praticar uma grande variedade de heurísticas. O professor deve ser corajoso, já que mesmo nas aulas cuidadosamente planeadas podem surgir imprevistos que conduzam a territórios desconhecidos (p.402).

Nestas palavras, é visível a importância da planificação de uma aula onde é proposta aos alunos a resolução de problemas. Dada a predisposição para o aparecimento de diversas resoluções e estratégias, o professor deverá estar preparado e tentar prever, ao máximo a multiplicidade de abordagens. Para além disso, o professor deverá ser capaz de preparar os alunos para este tipo de tarefas tão característico.

2.2. A trigonometria e alguns estudos realizados nesse âmbito

A Trigonometria é um dos vários tópicos lecionados no domínio da Geometria no 9.º ano de escolaridade, tratando-se do primeiro contato que os alunos têm com este conteúdo e é estudado apenas no âmbito do triângulo retângulo. Segundo o documento orientador de gestão curricular do Programa e Metas Curriculares de Matemática do

Ensino Básico, "o domínio dos vários conteúdos da Geometria se traduz na compreensão de conceitos geométricos e na sua operacionalização, nomeadamente ao nível da resolução de problemas" (MEC, 2013, p. 15).

Segundo Junior (2006) a importância do ensino da trigonometria relaciona-se com o seu caráter interdisciplinar, relacionado com a aplicabilidade nas mais diversas áreas de conhecimento, para além de fornecer um importante conteúdo para a sua contextualização sociocultural, através do estudo da sua evolução histórica. Similarmente, Oliveira (2013) refere que o ensino da trigonometria pode apoiar-se em dois pilares: a sua evolução histórica e aplicações. A autora indica que uma aprendizagem contextualizada nestes dois pilares, contribui para despertar o interesse dos alunos.

Será importante incutir nos alunos que "a trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem - ou nação" (Boyer, 1974, p. 116), o seu desenvolvimento esteve intrinsecamente ligado com o desenvolvimento da Geometria (Oliveira, 2013). Segundo Nogueira (2013), "importa considerar dois aspetos: por um lado, conhecer o interesse da Trigonometria nas aplicações práticas em diferentes domínios ao longo da História e, por outro, desenvolver práticas nas quais os alunos possam sentir-se motivados para a aprendizagem" (p.216).

Por fim, e ainda do ponto de vista do aluno, Nascimento (2005) afirma que a aprendizagem da trigonometria com situações problematizadoras, estimulando o pensar, a investigação e a realização, contribuem para que os alunos construam o significado das razões trigonométricas, favorecendo a argumentação e contribuindo para modificar as suas conceções erróneas.

Existem diversos trabalhos que mostram a aplicação da trigonometria nas mais diversas áreas. Oliveira (2013) aborda esse conteúdo, estudando essas aplicações na atualidade em temas como a cartografia, em particular através do Sistema de Posicionamento Global (GPS), a medicina, a física, a engenharia, nomeadamente a aeronáutica e a civil, e ainda na agrimensura. Na mesma ordem de ideias, Cargnin, Cardoso, Melo e Polizeli (2015) referem diversas atividades que podem ser trabalhadas com os alunos, de maneira a mostrar o papel da trigonometria na acústica, em rampas e escadas, nas ruas e estradas, nos telhados, na ótica e no cálculo da área.

Em Portugal, são escassos os trabalhos realizados sobre o tópico da Trigonometria e ainda menos aqueles que relacionam a resolução de problemas com este conteúdo matemático. Nesse sentido e devido à falta de literatura para tornar esta secção ainda mais enriquecedora, apresentam-se três estudos realizados no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada dos Mestrados em Ensino da Matemática.

O primeiro estudo que destaco é da autoria de Miranda (2010) e intitula-se "A aprendizagem da Trigonometria do Triângulo Rectângulo através da Resolução de Problemas". Foi realizado numa turma de 9.º ano e visa compreender em que medida é que a resolução de problemas influencia a aprendizagem da Trigonometria nos alunos.

Com base nos dados, a autora refere que três dos cinco grupos do seu estudo, em algumas das tarefas resolveram o problema tendo por base o modelo de Pólya. Nas suas resoluções eram visíveis a interpretação do problema, a elaboração e execução de uma estratégia de resolução e por fim, quando a solução não era a prevista, a revisão da estratégia e reflexão sobre a solução obtida. Com a exceção de um dos grupos que não realizava esta última parte.

Relativamente às estratégias, a mais utilizada pelos alunos foi a de identificar a informação pretendida, ou seja, a informação dada e a informação necessária para resolver a tarefa. A autora afirma ainda que, quando os problemas apresentados aos alunos apresentam uma figura, os alunos utilizam-na para uma melhor compreensão. Caso os problemas não tenham figuras, a estratégia passa por fazer um desenho como forma de auxílio. Quando confrontados com problemas que possibilitam resoluções distintas, utilizando ou não a trigonometria, os alunos escolhem abordagens em que usam conhecimentos anteriormente lecionados.

A autora aponta ainda para as mais valias da utilização da calculadora na sala de aula, na medida em que permitiu aos alunos efetuar cálculos com uma maior facilidade e brevidade, recuperando tempo para situações de maior relevância, nomeadamente nas estratégias de resolução. Contudo, revela que um ponto menos positivo da sua utilização é levar os alunos, muitas vezes, a confiar no resultado obtido e como consequência não se questionassem sobre a sua veracidade.

Por fim, a autora afirma que as dificuldades evidenciadas pelos alunos não estão propriamente ligadas ao tema da Trigonometria do triângulo retângulo, mas que são comuns à maioria dos conteúdos matemáticos, realçando por exemplo os arredondamentos, a manipulação algébrica, a linguagem matemática entre outros. Nas suas conclusões, enaltece o contributo do trabalho a pares como um dos contributos para o interesse e empenho dos alunos e afirma que a sua intervenção proporcionou um desenvolvimento de aptidões, nomeadamente ao nível do raciocínio, da comunicação escrita e oral e da própria resolução de problemas.

O segundo estudo a destacar, intitula-se "A aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade com recurso ao GeoGebra" (Mendes, 2016), e tem como principal objetivo averiguar o contributo que o GeoGebra tem no ensino e na aprendizagem de Trigonometria.

A autora revela que o recurso ao GeoGebra fomentou a autonomia na realização das tarefas, bem como no desenvolvimento de estratégias de exploração e de construção. Os alunos desenvolveram atividades de exploração, conjeturaram e formalizaram conceitos sobre as razões trigonométricas. Prevalecendo a compreensão e não apenas à memorização de fórmulas e procedimentos. Para além disso, a autora afirma que o recurso ao GeoGebra contribuiu para o empenho dos alunos nas atividades desenvolvidas durante a intervenção.

As dificuldades identificadas foram ao nível da prova de resultados obtidos, em estabelecer conexões com outros conceitos lecionados anteriormente, em fazer demonstrações, em expressar e interpretar os passos realizados nas suas propostas de resolução e ainda aplicar e interpretar fórmulas em contexto de realidade. Com o uso do *software*, a autora refere que os alunos tiveram mais facilidade em resolver tarefas com respostas mais imediatas, mas que tal não acontecia quando os alunos eram confrontados com problemas que necessitavam de uma interpretação e construção geométrica.

Os alunos consideraram que o GeoGebra funcionou como um facilitador na compreensão dos conceitos trigonométricos, bem como nas construções geométricas. Além disso, os alunos referiram que este recurso facilitou a superação de algumas das suas dificuldades.

O terceiro e último estudo apontado "A Aprendizagem da Trigonometria no 9.º ano de escolaridade através da diversidade de tarefas" (Ferrage, 2019) onde a autora tem como objetivo compreender as aprendizagens realizados pelos alunos nos tópicos da Trigonometria tendo como base a diversidade de tarefas.

A autora concluiu que os tópicos onde os alunos obtiveram um maior sucesso foi no reconhecimento das razões trigonométricas e das relações entre estas. Aqueles em que, pelo contrário, os alunos revelaram menor conhecimento foi na invariância das razões trigonométricas de um ângulo agudo e no reconhecimento dos valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos com amplitudes de referência.

Na resolução de problemas, observou que o número de alunos que implementam uma estratégia de resolução é superior ao número de alunos que obtém uma resposta. Duas possíveis justificações para isso relacionam-se com os erros procedimentais e/ou não ser implementado uma estratégia correta. As principais dificuldades reveladas pelos alunos na resolução de problemas não estão relacionados com os conhecimentos trigonométricos, no entanto essa dificuldade surgiu numa minoria de alunos.

No que diz respeito às demonstrações, a taxa de sucesso dos alunos é inferior comparativamente com a resolução de problemas. Este insucesso deve-se ao facto de uma grande parte dos alunos não responder a este tipo de tarefas. Relativamente aos que respondem, a autora revela que existe um grande número de alunos que apresentam casos particulares para realizarem as demonstrações, a falta de justificações e ainda a incapacidade de manipulação algébrica e justificação adequada. Em jeito de conclusão, Ferrage (2019) afirma que os alunos conseguem uma maior mobilização de conhecimentos quando se trata da resolução de problemas, confirmando que as dificuldades surgem mais pelo tipo de tarefa do que propriamente pelo conteúdo matemático.

Por fim, autora afirma que os alunos obtiveram melhores resultados nos tópicos matemáticos onde foram trabalhados diferentes tipos de tarefas, reforçando assim a importância das tarefas diversificadas na Matemática.

Para finalizar este capítulo, é importante referir que o NCTM (2008) considera que "os problemas de aplicação podem proporcionar contextos ricos quer para a utilização de ideias geométricas, quer para a prática na modelação e resolução de problemas"(p.369). Nesse sentido, podemos concluir que a Trigonometria proporciona contextos ricos de aprendizagem, revelando-se útil na resolução de uma variedade de problemas. Ainda neste documento pode ler-se que todos os alunos do 9.º ao 12.º ano deverão "utilizar relações trigonométricas para determinar comprimentos e amplitudes de ângulos" (p.364) e ainda "usar ideias geométricas para resolver problemas e para compreender outras disciplinas e outras áreas de interesse" (p.364).

CAPÍTULO 3

UNIDADE DE ENSINO

Neste capítulo apresenta-se a intervenção letiva realizada, construída, tendo em conta o tópico *Trigonometria* integrado no domínio da *Geometria e Medida*, para uma turma de 9.º ano de escolaridade, no Colégio Militar. Primeiramente realiza-se uma breve caracterização do contexto escolar, onde são descritos alguns dos aspetos mais relevantes da Escola e da turma. Esta caracterização é baseada nas observações realizadas ao longo do ano letivo, e ainda pela informação recolhida do documento *Projeto Educativo do Colégio,* bem como dos documentos oficiais dos Conselhos de Turma realizados ao longo do ano.

Seguidamente, faz-se a articulação da unidade de ensino com as opções didáticas tomadas à luz do programa em vigor, explicitando os conceitos fundamentais anteriormente lecionados na turma e expondo, em seguida, os principais conceitos matemáticos envolvidos no estudo. Apresenta-se ainda, a planificação da unidade e descreve-se sucintamente todas tarefas utilizadas, detalhando aquelas que são alvo do estudo. Refere-se também como foi realizada a avaliação das aprendizagens dos alunos. Por fim, é feita uma descrição sumária e reflexiva das aulas lecionadas, tendo em conta os objetivos previstos e aqueles que foram cumpridos face à planificação realizada para a intervenção letiva.

3.1. Contexto Escolar

3.1.1. Caracterização da Escola

O Colégio Militar intitula-se como "um estabelecimento militar de ensino não-superior, inserido na orgânica do Exército, tutelado pelo Ministério da Defesa Nacional, seguindo as diretrizes pedagógicas emanadas pelo Ministério da Educação e Ciência" (Colégio Militar, 2019, p.5). Está localizado, desde 1873, no edifício da Luz, situado no Largo da Luz, freguesia de Carnide do concelho de Lisboa. Ministra cursos do ensino regular do ensino básico e do ensino secundário, de acordo com o Sistema Educativo Nacional, sendo frequentado por filhos de militares e civis. Esta instituição de ensino visa promover o acesso dos seus alunos ao ensino superior, sustentando-o com uma formação militar que tem como referência a divisa "Um por todos, todos por um", a qual resume os valores do colégio ostentados no Código de Honra do Aluno.

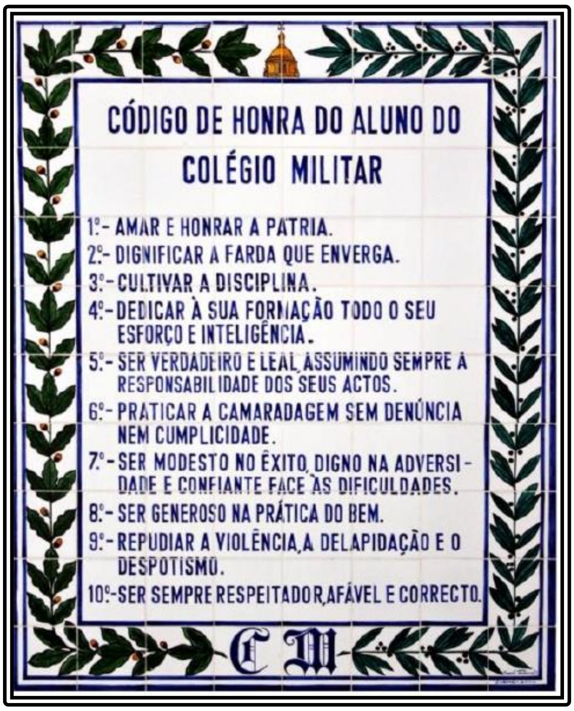


Figura 3 - Código de Honra do Aluno do Colégio Militar.

O Colégio Militar funciona, desde 2013 num sistema de ensino misto, num regime de externato ou internato e exclusivamente em regime de externato para o 1.º ciclo. O colégio tem um total de 770 alunos, desde o 1.º ciclo do ensino básico até ao ensino secundário.

Esta escola disponibiliza Atividades de Complemento Curricular que os alunos se inscrevem, não podendo ser acumulativas: ginástica, judo, esgrima, equitação, inglês e música. No que respeita ao espaço físico, o colégio contempla 52 salas de aulas, duas das quais de informática, um auditório, uma biblioteca, um salão nobre, sala de leitura e uma de armas, arquivo histórico, Museu do Colégio Militar e Museu de História Natural, bem como um Pavilhão de Ciências equipado com equipamentos de laboratório modernos. Possui ainda dois edifícios para alojamento, enfermaria, piscina coberta, pista de atletismo, campos para várias modalidades, sala de esgrima, picadeiros e cavalariças com capacidade para 60 cavalos.

O colégio tem algumas particularidades: todos os alunos entram e saem das aulas à mesma hora e têm todos os intervalos em comum, não havendo qualquer ruido na rua durante as aulas. Para além disto, os alunos até ao 9.º ano de escolaridade, não têm qualquer tipo de equipamento eletrónico pessoal à sua disposição durante o período de permanência no colégio. No entanto, é autorizada a utilização do *tablet* ou computador em sala de aula, desde que indicada pelo professor, mas sem ligação à internet. Os alunos vestem farda, são identificados pelo seu apelido e/ou número e têm uma secretária pessoal numa sala própria da turma onde têm aulas e guardam os seus pertences.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma do 9.º ano em que realizei a minha prática de ensino supervisionada é constituída por dezanove alunos, sete dos quais são raparigas, e dezassete são alunos em regime de internato. Os alunos tinham idades compreendidas entre os 14 e os 16 anos e todos eles estavam a frequentar o 9.º ano pela primeira vez.

Os alunos, de modo geral, tiveram um percurso escolar bem-sucedido, uma vez que apenas dois apresentavam retenções até ao 9.º ano. No entanto, esta turma caracteriza-se por ser bastante heterogénea relativamente ao aproveitamento e/ou à participação. Tendo em conta estes últimos dois aspetos, a turma pode ser dividida em seis grupos distintos. Tendo em conta os alunos com um bom aproveitamento, podemos verificar que apenas dois tinham uma participação ativa nas aulas. No que concerne ao aproveitamento mediano, existem quatro alunos com fraca participação, quatro com uma intervenção satisfatória e três que intervêm regularmente. Por fim, relativamente aos alunos com um fraco aproveitamento, são na sua totalidade, alunos que raramente participam nas aulas.

Tabela 1 - Quadro comparativo entre o aproveitamento e a participação dos alunos.

Aproveitamento / Participação	Baixo	Médio	Alto
Baixa	3	4	2
Média	0	4	1
Alta	0	3	2

Durante as aulas, os alunos tiveram um comportamento satisfatório, classificado como Bom, pelo conselho de turma numa escala de Insuficiente a Muito Bom. Na sua maioria, são diligentes relativamente à resolução dos trabalhos de casa.

Quanto ao desempenho académico desta turma na disciplina de Matemática, os resultados são satisfatórios com a maioria das classificações no nível 3. Como poderá ser observado nos seguintes gráficos, as notas dos alunos são classificadas numa escala de 0-200, no entanto, é possível fazer a correspondência com a escala de 1-5 da seguinte forma: a cotação obtida entre 0-49 correspondente ao nível 1, de 50-99 corresponde ao nível 2, 100-139 ao nível 3, a classificação compreendida entre 140 e 179 corresponde ao nível 4 e por fim a cotação entre 180-200 ao nível 5.

No que diz respeito às classificações do primeiro período, a média foi de 132,6 valores e cerca de 11% dos alunos teve classificação negativa de nível 2, 47% obteve a classificação final de 3, e que os restantes alunos da turma obtiveram uma classificação igual ou superior a 4, não tendo existido nenhum aluno com nível 1 (Figura 4).

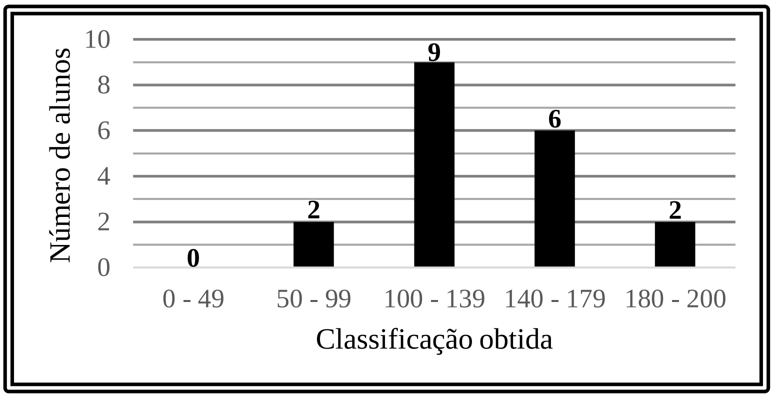


Figura 4 - Classificações dos alunos a Matemática no final do 1.º Período do ano letivo 2018/2019.

No segundo período, o as classificações dos alunos foram muito idênticas às obtidas no período anterior, tendo-se registando, também, uma maior incidência no nível 3 (Figura 5), com uma média geral de 132,4 valores. Na passagem de um período para outro, houve um aluno que passou do nível 3 para o nível 2 e outro que subiu do nível 4 para o nível 5.

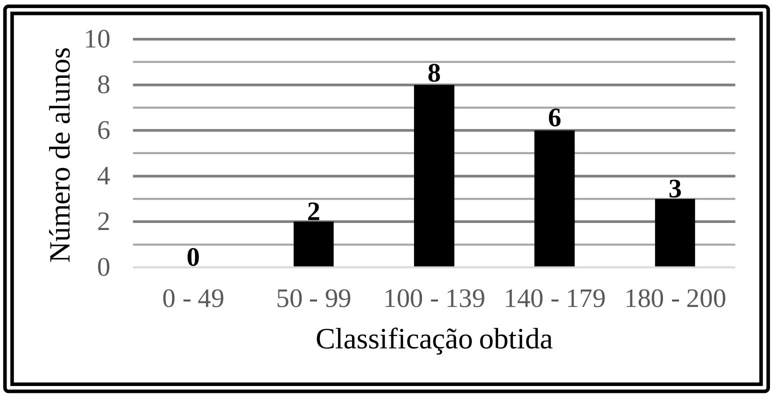


Figura 5 - Classificações dos alunos a Matemática no final do 2.º Período do ano letivo 2018/2019.

No final do ano letivo e antes dos alunos realizarem as Provas Nacionais nas disciplinas de Português e Matemática, a média geral da avaliação da turma era de 142,0 valores, com média de 137,8 nas disciplinas literárias e 162,8 nas disciplinas de ciências exatas. Relativamente à Matemática, as classificações obtidas no terceiro período mantiveram-se com o mesmo panorama das obtidas anteriormente (Figura 6) com uma média de 132,4 valores. As alterações registadas foram num aumento de nível por parte de dois alunos, uma subida do nível 2 para o nível 3, e outra subida do nível 3 para o nível 4.

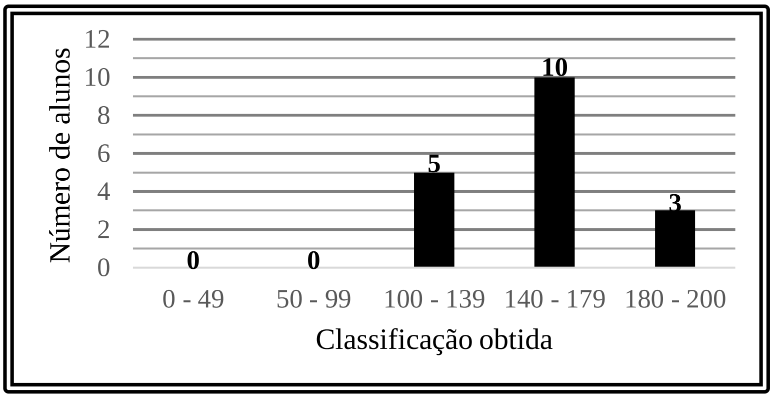


Figura 6 - Classificações dos alunos a Matemática no final do 3.º Período do ano letivo 2018/2019.

Para finalizar a caraterização da turma, podem ser observadas as classificações obtidas pelos alunos na Prova Nacional de Matemática (Figura 7). A média geral da turma foi de cerca de 75%, face à média geral do colégio de 77% e à média nacional de 55% (Júri Nacional de Exames, 2019). Foram admitidos a exame dezoito dos dezanove alunos da turma e nenhum aluno obteve classificação negativa. O nível de maior incidência, correspondente a dez alunos, foi o nível 4, seguindo-se o nível 3 com cerca de 26% e o nível 5 com 16% dos alunos a obter essa classificação.

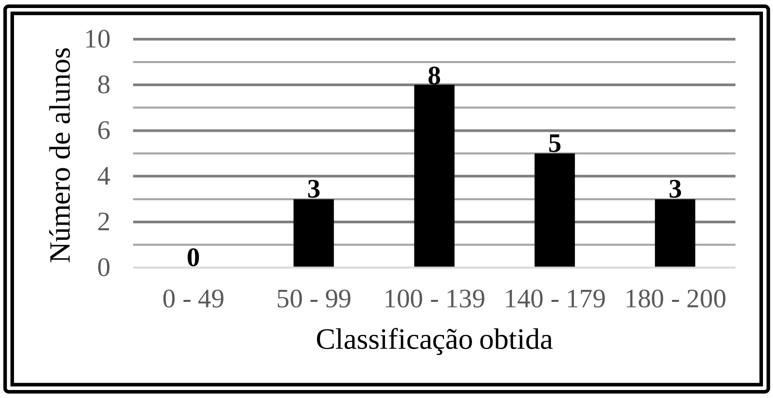


Figura 7 - Classificações dos alunos a Matemática na Prova Nacional de Matemática de 1.º fase do letivo 2018/2019.

3.2. Ancoragem e organização da unidade de ensino

A trigonometria é um tópico, segundo o Programa de Matemática (MEC, 2013), a ser abordado no 9.º ano de escolaridade. Está incluída no domínio da *Geometria e Medida*, o mais extenso neste ano de escolaridade. Neste tema são abordadas, pela primeira vez, as definições das três razões trigonométricas, $seno$, $cosseno$ e $tangente$; a Fórmula Fundamental da Trigonometria; a relação entre a $tangente$ de um ângulo agudo e o $seno$ e $cosseno$ do mesmo ângulo; a relação entre o $seno$ e o $cosseno$ de ângulos complementares; é realizada a dedução dos valores das razões trigonométricas dos ângulos de $45°, 30°$ e $60°$; utiliza-se a tabela trigonométrica bem como a calculadora para determinar valores aproximados da amplitude de um ângulo conhecida uma razão trigonométrica; e por fim, procede-se à resolução de problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas (MEC, 2013).

Para a aprendizagem desta unidade de ensino, é necessário que os alunos tenham conhecimento de alguns conteúdos lecionados anteriormente, nomeadamente, de ângulos e triângulos. Conceitos como ângulo agudo, Teorema de Pitágoras, altura de um triângulo e semelhança de triângulos são bases essenciais para a aprendizagem da trigonometria.

Desde muito cedo, no 1.º ciclo, os alunos têm logo contato com a noção de ângulo que é depois aprofundada no 2.º ciclo. O tópico de semelhança, e mais concretamente a semelhança de triângulos, é iniciado no 7.º ano, sendo imprescindível que os alunos saibam reconhecer os três critérios de semelhança de triângulos: *Lado – Lado – Lado* (*LLL*), *Lado – Ângulo – Lado* (*LAL*) e *Ângulo – Ângulo* (*AA*). Todos estes critérios de semelhança são demonstrados a partir do Teorema de Tales. No ano seguinte, no 8.º ano, a partir da semelhança de triângulos, os alunos aprendem o Teorema de Pitágoras.

No colégio, e tendo em conta a planificação anual realizada pelos professores do grupo disciplinar, foi definido que esta subunidade seria lecionada em 14 tempos letivos. Para além destas aulas, seria reservado um tempo para exercícios de consolidação, na aula antes da ficha de avaliação e ainda dois tempos para a realização da ficha de avaliação, perfazendo assim um total de 17 tempos letivos.

A intervenção letiva decorreu no 2.º Período iniciando-se no dia 14 de fevereiro e acabando no dia 21 de março, tendo dado ainda, no dia 26 de abril, um bloco de 45 min, perfazendo assim 8 aulas de 90 minutos e 5 aulas de 45 minutos incluindo os tempos de avaliação. No quadro seguinte (Quadro 4) é explicitado, e de acordo com o programa vigente, a planificação geral dos conteúdos abordados, bem como os objetivos e duração de cada aula. São ainda acrescentados os momentos de avaliação e as aulas de esclarecimento e consolidação de aprendizagens.

Quadro 4 - Planificação geral da intervenção letiva

Aulas	Tópicos	Objetivos	Tarefas
Aula 1 (90 minutos) 14 de fevereiro	Semelhança de triângulos. Razões trigonométricas.	• Recordar os critérios de semelhança de triângulos. • Rever elementos de um triângulo retângulo: cateto oposto, adjacente e hipotenusa. • Definir as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. • Consolidar conteúdos.	**Ficha de trabalho 10** *“Semelhança de triângulos”* **Manual** **Ficha de trabalho 11** *“Razões trigonométricas”*
Aula 2 (45 minutos) 19 de fevereiro	Razões trigonométricas.	• Rever as definições das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. • Consolidar conteúdos.	**Ficha de trabalho 11** *“Razões trigonométricas”*

			Manual
Aula 3 (90 minutos) 21 de fevereiro	Propriedades das razões trigonométricas.	• Reconhecer e justificar que o valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo é independente da unidade de comprimento fixada. • Reconhecer que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números positivos menores do que 1. • Desenvolver a capacidade de argumentação.	**Ficha de trabalho 12** *“Invariância nas razões trigonométricas”* **Manual**
Aula 4 (45 minutos) 25 de fevereiro	Propriedades das razões trigonométricas. Razões trigonométricas de dois ângulos de igual amplitude.	• Justificar que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números positivos menores do que 1. • Reconhecer e justificar que a tangente de um ângulo agudo é sempre um número positivo. • Reconhecer e demonstrar que ângulos de igual amplitude têm o mesmo seno, cosseno e tangente. • Desenvolver a capacidade de argumentação, demonstração e raciocínio matemático.	**Manual**
(90 minutos) 26 de fevereiro	**Entrega e correção da ficha de avaliação de conteúdos anteriores à Trigonometria.**		
Aula 5 (90 minutos) 28 de fevereiro	Calculadora e tabela trigonométrica. Resolver triângulos retângulos.	• Utilizar a tabela trigonométrica e/ou a calculadora para calcular o valor da razão trigonométrica conhecida a amplitude de um ângulo. • Utilizar a tabela trigonométrica e/ou a calculadora para determinar o valor da amplitude de um ângulo a partir de uma das suas razões trigonométricas. • Reconhecer quantos e quais os elementos de um triângulo retângulo. • Utilizar a trigonometria para, a partir de certos elementos de um triângulo retângulo, determinar os restantes. • Consolidar conteúdos.	**Manual**

Aula 6 (45 minutos) 11 de março	Problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas.	• Rever os principais conteúdos lecionados até ao momento sobre trigonometria. • Relacionar os dados do problema com o que é pedido para determinar. • Utilizar a calculadora para determinar os valores das razões trigonométricas a partir da amplitude de um ângulo e vice-versa. • Desenvolver a capacidade de resolver problemas.	**Manual**
Aula 7 (90 minutos) 12 de março	Fórmula fundamental da trigonometria. Relação entre a tangente de um ângulo agudo e o seno e o cosseno do mesmo ângulo.	• Provar que triângulos são retângulos a partir do recíproco do Teorema de Pitágoras, percebendo a diferença entre o teorema e o seu recíproco. • Reconhecer e provar que a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo agudo é igual a 1 e designar este resultado por "Fórmula Fundamental da Trigonometria". • Reconhecer e provar que a tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre os respetivos seno e cosseno. • Determinar valores exatos de razões trigonométricas a partir das relações entre razões trigonométricas do mesmo ângulo. • Desenvolver o raciocínio matemático.	**Ficha de trabalho 13** *"Relações entre as razões trigonométricas"* **Manual**
Aula 8 (90 minutos) 14 de março	Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares. Valores das razões trigonométricas dos ângulos de amplitude $30°, 45°$ e $60°$.	• Recordar a noção de ângulos complementares. • Reconhecer e provar que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de um ângulo complementar. • Deduzir, a partir de argumentos geométricos, as razões trigonométricas dos ângulos de amplitude $30°, 45°$ e $60°,$ e designá-las por amplitudes de referência.	**Manual**

		• Reconhecer a tabela trigonométrica das amplitudes de referência. • Desenvolver a comunicação matemática e o raciocínio matemático.	
Aula 9 (45 minutos) 18 de março	Problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas.	• Consolidar conhecimentos sobre a trigonometria. • Reconhecer e experienciar diferentes contextos na resolução de problemas. • Desenvolver a capacidade de argumentação e de resolver problemas.	**Ficha de trabalho 14** *"Resolver problemas"*
Aula 10 (90 minutos) 19 de março	Problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas.	• Consolidar conhecimentos sobre a trigonometria. • Desenvolver a capacidade de argumentação e de resolver problemas.	**Ficha de trabalho 15** *"Resolução de Problemas na Trigonometria"*
	Questão aula		
Aula 11 (90 minutos) 21 de março	Problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas.	• Consolidar conhecimentos sobre a trigonometria. • Rever os erros mais comuns efetuados na questão aula. • Desenvolver a capacidade de argumentação e de resolver problemas.	**Ficha de trabalho 15** *"Resolução de Problemas na Trigonometria"*
Aula 12 (90 minutos) 25 de março	**Ficha de avaliação**		
Aula 13 (45 minutos) 26 de abril	Aplicação da trigonometria num contexto de realidade.	• Utilizar a trigonometria para determinar a altura de edifícios e monumentos do colégio. • Desenvolver a capacidade de argumentação, redação e artística.	**Cartolina** *"Exposição do Open Day do Colégio"*

3.3. Conceitos fundamentais da unidade de ensino

Ao nível do ensino básico, o estudo da Trigonometria é feito de forma elementar e restrito à Trigonometria do triângulo retângulo, ou seja, os ângulos a serem abordados serão ângulos agudos, isto é, de amplitudes compreendidas entre 0° e 90°. Num triângulo retângulo, podemos considerar seis elementos: as amplitudes dos três ângulos e as medidas de comprimentos dos três lados. Resolver um triângulo retângulo é determinar o valor dos seus elementos, e é a Trigonometria que, estabelecendo relações entre os lados e os ângulos, permite resolver este tipo de situações.

Antes de abordar o conteúdo matemático propriamente dito, é necessário recordar alguns conceitos fundamentais para o estudo da Trigonometria, bem como algumas das notações utilizadas. Os conteúdos aqui apresentados foram retirados e/ou adaptados do Programa e Metas Curriculares em vigor e do manual adotado pela Escola: *Matemática em ação 9*. Em anexo (Anexo 1) são apresentados o significado das notações utilizadas quer ao longo deste capítulo, quer nos planos de aulas da unidade de ensino, igualmente em anexo.

CONCEITOS FUNDAMENTAIS:

Definição 3.1.

Designa-se por **ângulo** a região de um plano compreendida entre duas semirretas de origem comum. As semirretas são os lados do ângulo e o ponto onde as duas semirretas se intersetam designa-se por vértice do ângulo.

De acordo com a figura 8, temos que $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$ são os lados do ângulo e o ponto A é o vértice do ângulo. Sempre que me referir a ângulos, estarei a considerar ângulos convexos medidos em graus. Na figura 8, o ângulo convexo corresponde a α. O outro ângulo designado por β chama-se ângulo côncavo.

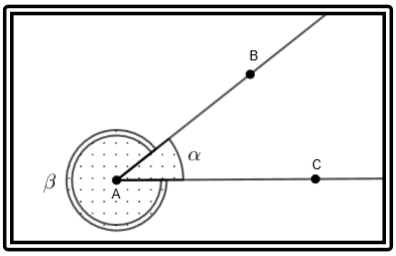


Figura 8 - Ângulo

Definição 3.2.

Dois ângulos designam-se **ângulos complementares**, quando a soma das medidas das suas amplitudes é igual a 90°.

Na figura 9, podemos reparar que o ângulo α e o ângulo β são complementares.

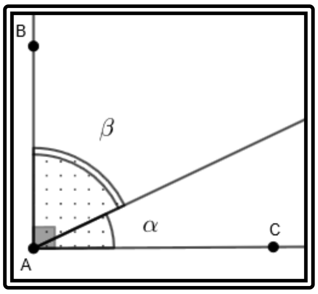
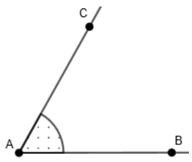
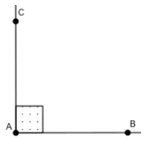
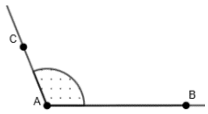
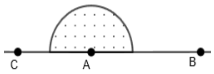


Figura 9 – Ângulos complementares.

Os ângulos podem classificar-se como agudo, reto, obtuso e raso.

Quadro 5 - Classificação de ângulos.

Agudo	Reto	Obtuso	Raso
			
Amplitude inferior a 90°.	Amplitude de 90°.	Amplitude superior a 90° e inferior a 180°.	Amplitude de 180°.

Definição 3.3.

Define-se **triângulo** como figura plana limitada por três segmentos de reta que concorrem, dois a dois, em três pontos diferentes formando três lados e três ângulos internos.

Os segmentos de reta são os lados do triângulo e os extremos dos segmentos designam-se por vértices. A soma das amplitudes dos três ângulos internos perfazem 180°. Na figura seguinte, ilustra-se um triângulo de vértices A, B, C e lados $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$ (Figura 10).

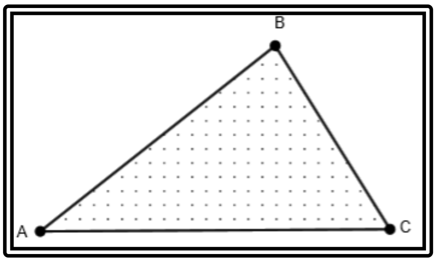


Figura 10 - Exemplo de um triângulo.

Definição 3.4.

Nas condições da figura 11, chama-se **altura do triângulo** relativamente ao lado $[AB]$ ao segmento de reta $[CD]$, onde D é o ponto de interseção de AB com a reta que passa por C e é perpendicular a AB.

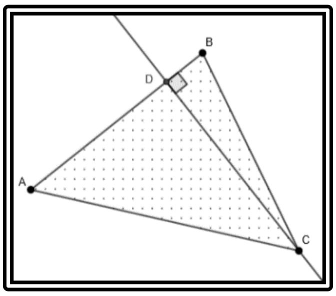
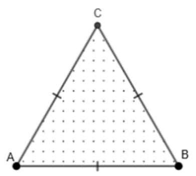
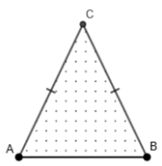
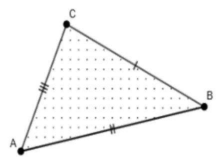


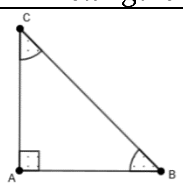
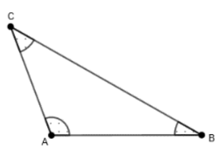
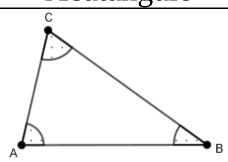
Figura 11 - Altura do triângulo relativamente à base $[AB]$.

Os triângulos podem ser classificados sob dois critérios: quanto aos lados e quanto aos ângulos, como se esquematiza nos quadros seguintes (Quadro 6 e Quadro 7).

Quadro 6 - Classificação de triângulos quanto aos lados.

Equilátero	Isósceles	Escaleno
		
Possui todos os lados com a mesma medida.	Possui dois lados com a mesma medida.	Possui os três lados com medidas distintas.

Quadro 7 - Classificação de triângulos quanto aos ângulos.

Retângulo	Obtusângulo	Acutângulo
		
Possui um ângulo reto.	Possui um ângulo obtuso.	Possui todos os ângulos agudos.

Observação: ângulos (segmentos de reta) congruentes são ângulos (segmentos de reta) que possuem a mesma amplitude (medida de comprimento).

Triângulos retângulos:

Ao longo do subcapítulo, consideremos fixada a unidade de comprimento, a unidade de amplitude em ângulos, o grau, e um triângulo $[ABC]$ retângulo em A, de lados de medida de comprimento $a = \overline{CB}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e de ângulo interno $\alpha = \sphericalangle ABC$, como podemos observar na figura seguinte (Figura 12).

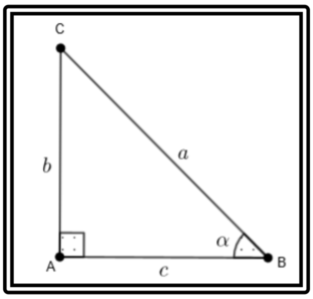


Figura 12 - Triângulo retângulo.

Definição 3.5.

Considere-se um triângulo $[ABC]$ retângulo em A, de lados $[AC], [AB]$ e $[CB]$ e de ângulo $\alpha = \sphericalangle ABC$. Designa-se por **hipotenusa** o lado oposto ao ângulo reto e por catetos os lados que lhe são adjacentes. Relativamente ao ângulo agudo α, designa-se por **cateto oposto** ao ângulo α o segmento de reta $[AC]$ e por **cateto adjacente** ao ângulo α o segmento de reta $[AB]$ (Figura 13).

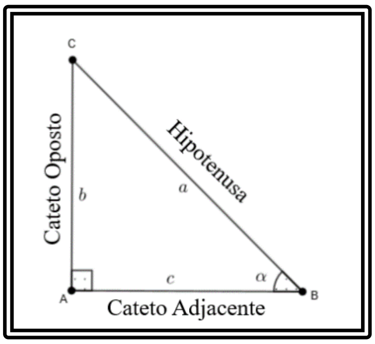


Figura 13 - Classificação dos lados de um triângulo retângulo relativamente ao ângulo α

Teorema de Pitágoras:

Considere-se um triângulo retângulo $[ABC]$ nas condições da definição anterior. O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

Teorema de Tales:

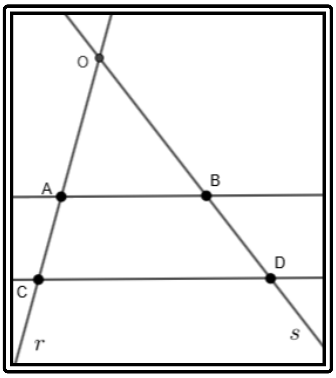


Figura 14 - Teorema de Tales.

Se no mesmo plano, duas ou mais retas paralelas intersetam duas retas concorrentes, os triângulos obtidos têm os comprimentos dos lados correspondentes diretamente proporcionais. Conforme a figura anterior (Figura 14), se as retas r e s são concorrentes e AB e CD são retas paralelas então:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

Do mesmo modo, nas condições do teorema anterior, tem-se também as igualdades:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$$

E ainda,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$$

Definição 3.6.

Dois triângulos são **semelhantes** quando e apenas quando, todos os ângulos de um são iguais a todos os ângulos do outro e os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais.

Critérios de semelhança de triângulos:

Existem três critérios de semelhança: o critério AA (ângulo-ângulo), o critério LAL (lado-ângulo-lado) e o critério LLL (lado-lado-lado), que são enunciados da seguinte forma:

- Critério AA: Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são geometricamente iguais a dois ângulos do outro.
- Critério LAL: Dois triângulos são semelhantes quando os comprimentos de dois lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos de dois lados do outro e os ângulos por eles formados em cada triângulo são congruentes.
- Critério LLL: Dois triângulos são semelhantes se os comprimentos dos três lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos dos três lados do outro.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS AGUDOS:

Dado um ângulo agudo α de vértice num ponto B, é possível construir triângulos retângulos em que α seja um dos ângulos internos, traçando perpendiculares de um ponto qualquer (distinto do vértice), de um dos lados do ângulo α para o outro lado, como sugere a figura seguinte.

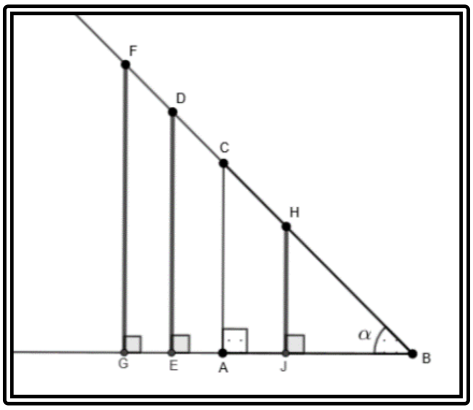


Figura 15 - Triângulos retângulos com um ângulo interno comum.

Podemos observar que os triângulos $[ABC], [JBH], [EBD], [GBF]$ e todos aqueles que são construídos segundo o mesmo princípio, apresentam dois ângulos correspondentes congruentes, o ângulo α e o ângulo reto. Pelo critério de semelhança

AA, podemos concluir que os triângulos assim construídos são semelhantes a qualquer triângulo retângulo que admita um ângulo interno igual a α.

Tem-se ainda que as retas $\overline{AC}$, $\overline{JH}$, $\overline{ED}$ e $\overline{GF}$ são paralelas, pois são todas perpendiculares à reta $\overline{AB}$.

Assim, pelo Teorema de Tales, podemos afirmar que as razões entre as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos são diretamente proporcionais. Em particular,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{JH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{FB}} \tag{1}$$

Podemos reparar que:

- $\overline{AC}$, $\overline{JH}$, $\overline{ED}$ e $\overline{GF}$ representam os comprimentos dos catetos opostos ao ângulo α, respetivamente, dos triângulos $[ABC]$, $[JBH]$, $[EBD]$ e $[GBF]$.
- $\overline{CB}$, $\overline{HB}$, $\overline{DB}$ e $\overline{FB}$ representam os comprimentos das hipotenusas, respetivamente, dos triângulos $[ABC]$, $[JBH]$, $[EBD]$ e $[GBF]$.

Assim, podemos concluir a partir das igualdades (1) que o quociente entre a medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo α e a medida do comprimento da hipotenusa, é igual nos triângulos retângulos $[ABC]$, $[JBH]$, $[EBD]$ e $[GBF]$ e em todos aqueles que sejam obtidos de igual forma.

De modo análogo ao anterior, estabelecem-se igualdades para as razões entre as medidas dos restantes lados correspondentes, nomeadamente entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa e entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α. Assim, de seguida, definiremos as três razões trigonométricas com base na figura 13.

Definição 3.7.

Designa-se por **seno de $\boldsymbol{\alpha}$**, e representa-se abreviadamente por $\boldsymbol{sen\,\alpha}$, o quociente entre as medidas dos comprimentos do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa, ou seja,

$$sen\,\alpha = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = \frac{b}{a}.$$

Definição 3.8.

Designa-se por **cosseno de $\boldsymbol{\alpha}$**, e representa-se abreviadamente por $\boldsymbol{cos\ \alpha}$, o quociente entre as medidas dos comprimentos do cateto adjacente ao ângulo α e da hipotenusa, ou seja,

$$cos\ \alpha = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = \frac{c}{a}.$$

Definição 3.9.

Designa-se por **tangente de $\boldsymbol{\alpha}$**, e representa-se abreviadamente por $\boldsymbol{tg\ \alpha}$ ou por $\boldsymbol{tan\ \alpha}$, o quociente entre as medidas dos comprimentos do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo α, ou seja,

$$tg\ \alpha = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha} = \frac{b}{c}.$$

Observação: É importante salientar que, tendo em conta a existência de uma razão de proporcionalidade entre as medidas de comprimento, as razões são independentes das unidades de medida consideradas, no entanto, as unidades de medida têm de ser as mesmas para os dois termos da razão.

Teorema 3.1.

Ângulos de igual amplitude têm o mesmo seno, cosseno e tangente.

Demonstração:

Consideremos dois ângulos agudos β e β' com a mesma amplitude. Consideremos ainda os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ retângulos em B e B', respetivamente tais que $\sphericalangle BAC = \beta$ e $\sphericalangle B'A'C' = \beta'$.

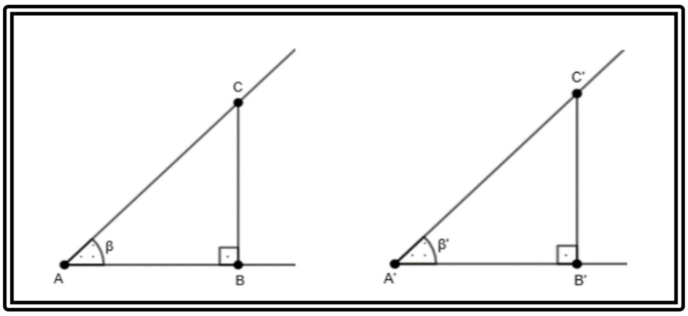


Figura 16 - Triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ retângulos em B e B′.

Vamos provar que $sen\ \beta = sen\ \beta'$.
(A demonstração para as restantes razões trigonométricas obtém-se de forma idêntica.)
Ora,

como $\hat{\beta} = \widehat{\beta'}$ e $A\hat{B}C = A'\widehat{B'}C'$ (= 90°), logo pelo critério de semelhança AA (ângulo-ângulo), os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes.

Em triângulos semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais. Logo,

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Leftrightarrow \overline{CB} \times \overline{A'C'} = \overline{AC} \times \overline{C'B'} \Leftrightarrow \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{A'C'}} \Leftrightarrow sen\ \beta = sen\ \beta' \blacksquare$$

Observação: como as razões entre as medidas dos comprimentos de lados correspondentes dependem apenas da amplitude do ângulo α (como acabamos de demonstrar), muitas vezes escrevemos $sen\ \hat{\alpha}$, $cos\ \hat{\alpha}$ e $tg\ \hat{\alpha}$ em vez de $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$ e $tg\ \alpha$, respetivamente.

RELAÇÕES ENTRE AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Das definições das razões trigonométricas de um mesmo ângulo resultam relações entre elas, algumas das quais serão apresentadas no teorema seguinte:

Teorema 3.2.

Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A, de lados de medida de comprimento $a = \overline{CB}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e de ângulo interno $\alpha = \sphericalangle ABC$ (conforme a Figura 13), temos que:

i. $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$
ii. Fórmula Fundamental da Trigonometria: $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

Observação: Por uma questão de simplificação de escrita, podemos escrever $sen^2\alpha$ em vez de $(sen\ \alpha)^2$ e $cos^2\ \alpha$ em vez de $(cos\ \alpha)^2$.

Demonstração:

Nas condições do enunciado, tem-se que $sen\ \alpha = \frac{b}{a}$ e que $cos\ \alpha = \frac{c}{a}$.

i.

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\,\alpha \blacksquare$$

ii.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = b^2 + c^2$. Pelo que,

$$sen^2\alpha + cos^2\,\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \blacksquare$$

Teorema 3.3.

Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A, de lados de medida de comprimento $a = \overline{CB}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e de ângulos internos $\sphericalangle ABC$ e $\sphericalangle ACB$ com amplitudes α e β, respetivamente (Figura 17), então:

i. $sen\,\alpha = cos\;\beta$
ii. $cos\,\alpha = sen\;\beta$
iii. $tg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\beta}$

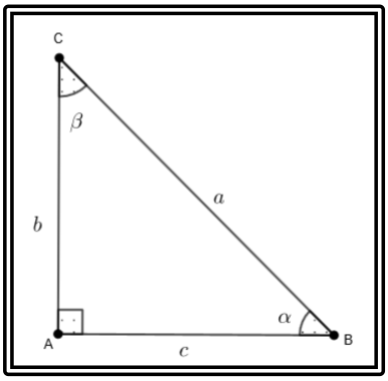


Figura 17 - Triângulo retângulo em A.

Demonstração:

Serão demonstradas as relações enunciadas em i., ii., e iii. em simultâneo.

Consideremos o triângulo $[ABC]$ retângulo em A nas condições da figura anterior (Figura 17). Temos que:

- $sen\,\alpha = \frac{b}{a}$, $cos\,\alpha = \frac{c}{a}$ e que $tg\,\alpha = \frac{b}{c}$
- $sen\,\beta = \frac{c}{a}$, $cos\,\beta = \frac{b}{a}$ e que $tg\,\beta = \frac{c}{b}$

Comparando as razões trigonométricas de α com as razões trigonométricas de β, podemos verificar que:

- $sen\ \alpha = cos\ \beta$
- $cos\ \alpha = sen\ \beta$
- $tg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \beta}$ ■

Se α e β são amplitudes de ângulos agidos de um triângulo retângulo, tem-se que $\alpha + \beta = 90°$. Assim, pelo teorema anterior obtemos:

- $sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$
- $cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)$
- $tg\ \alpha = \frac{1}{tg\ (90° - \alpha)}$

VALORES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO

Num triângulo retângulo, o lado maior é a hipotenusa, pelo que os catetos são sempre menores que a hipotenusa. Nesse sentido e atendendo às definições de seno e de cosseno de um ângulo agudo α, podemos concluir que:

- $0 < sen\ \alpha < 1$
- $0 < cos\ \alpha < 1$

Relativamente à tangente de um ângulo agudo α e atendendo à definição de tangente, em conformidade com a figura 13, podemos concluir que:

- $0 < tg\ \alpha < 1$, quando $\overline{AC} < \overline{AB}$.
- $tg\ \alpha = 1$, quando $\overline{AC} = \overline{AB}$.
- $tg\ \alpha > 1$, quando $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Podemos recorrer quer à calculadora quer a uma tabela de valores trigonométricos para determinar os valores aproximados das razões trigonométricas a partir do valor da amplitude de um ângulo. É possível ainda, a partir do valor de uma razão trigonométrica, determinar o valor da amplitude do ângulo correspondente.

Para determinar o valor exato das razões trigonométricas de ângulos podemos recorrer às relações entre razões trigonométricas do mesmo ângulo (Teorema 3.2.). Caso seja o valor de um dos ângulos de referência, $30°, 45°$ e $60°$, estes encontram-se tabelados. De seguida, será mostrado o processo para obter os valores das razões trigonométricas desses ângulos, recorrendo à construção geométrica de um triângulo.

Ângulo de amplitude de $45°$

Consideremos fixada uma unidade de comprimento e um quadrado $[ABCD]$, cuja medida de comprimento dos lados é 1 (figura 18).

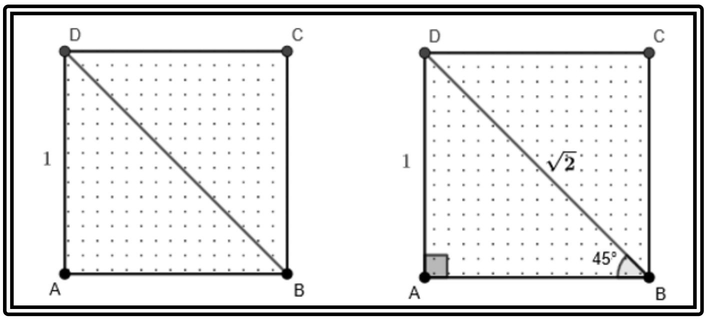


Figura 18 - Quadrado de lado 1.

Como $B\hat{A}D = 90°$, o triângulo $[ABD]$ é retângulo em A. Como $\overline{AB} = \overline{AD}$, e a lados iguais opõem-se ângulos de igual amplitude, concluímos que $A\hat{B}D = A\hat{D}B = 45°$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtém-se:

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 2 \Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{2}$

Como $\overline{BD} > 0$ porque é uma medida de comprimento, então $\overline{BD} = \sqrt{2}$. Assim:

- $sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $tg\ 45° = \frac{1}{1} = 1$

Ângulos de amplitude de $30°$ e de $60°$

Consideremos um triângulo $[ABC]$ equilátero, cuja medida de comprimento dos lados é 2 (na unidade de comprimento fixada) (Figura 19). Sendo o triângulo equilátero, todos os seus ângulos internos têm a mesma amplitude que é de $60°$.

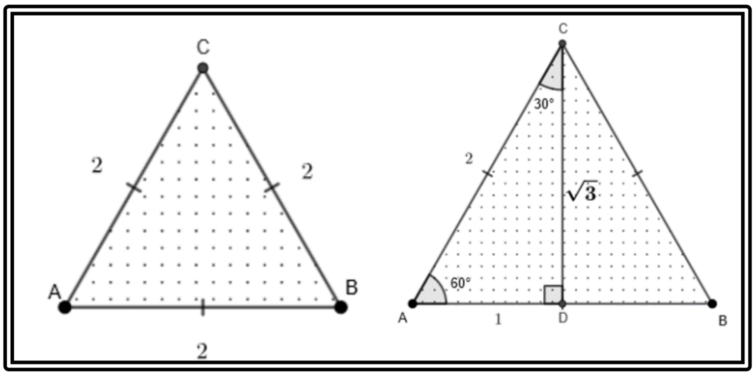


Figura 19 - Triângulo de lado 2.

Seja $[CD]$ a altura relativa à base $[AB]$, assim o triângulo $[ADC]$ é retângulo em D (pela definição de altura de um triângulo) e como $C\hat{A}D = 60°$, então $A\hat{C}D = 30°$. Além disso, como $\overline{AC} = \overline{CB}$ sabemos que D é ponto médio de $[AB]$. Logo $\overline{AD} = 1$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow 2^2 = \overline{CD}^2 + 1^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow \overline{CD} = \pm\sqrt{3}$$

Como $\overline{CD} > 0$ porque é uma medida de comprimento, então $\overline{CD} = \sqrt{3}$. Assim:

- $sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $cos\ 60° = \frac{1}{2}$
- $tg\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Utilizando a mesma construção ou pela complementaridade dos ângulos, observamos que:

- $sen\ 30° = \frac{1}{2}$
- $cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $tg\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A tabela seguinte resume os valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos de amplitude de $30°, 45°$ e $60°$:

Tabela 2 - Valores exatos de ângulos de amplitudes de referência.

	$30°$	$45°$	$60°$
$\boldsymbol{sen\ \alpha}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{cos\ \alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\boldsymbol{tg\ \alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3.4. Estratégias de ensino e recursos

Segundo Ponte (2005), a planificação de uma unidade requer que o professor considere uma diversidade de fatores, desde a escolha dos tipos de tarefas, aos modos de trabalho e materiais. Deverá ter ainda a preocupação de se reger pelos documentos curriculares oficiais, bem como ter em atenção os alunos com quem trabalha, as condições e recursos da escola e da comunidade, não esquecendo os materiais curriculares e os fatores do contexto escolar e social. Tendo isto em atenção, privilegiei o trabalho de descoberta e de construção do conhecimento por parte dos alunos (Ponte, 2005), levando-os a desenvolver a sua comunicação escrita e oral com particular atenção nas suas estratégias de resolução.

Tal como já foi referido anteriormente, o estudo tem por base a resolução de problemas, uma vez que esta é uma forte componente da aprendizagem da trigonometria neste ano de escolaridade. Nas aulas, tentei incutir nos alunos um modelo para resolver problemas, realçando a importância da interpretação dos dados e da necessidade da resposta ao problema. Diversos autores, em especial Pólya (2003) e Schukajlow, Kolter e Blum (2015) defendem a utilização de um modelo para resolver problemas como fator de desenvolvimento da organização e elaboração de estratégias.

Para além da resolução de problemas, é importante que os alunos contatem com uma variedade de tipos de tarefas para que a sua aprendizagem seja significativa, tarefas que se diferenciem no grau de desafio e estrutura. Por outro lado, foi ainda indispensável, preocupar-me não só com a questão da diversificação, mas com um conjunto de tarefas, que em complemento àquilo que o manual dos alunos oferecia, lhes permitisse construir conceitos, compreender procedimentos matemáticos, dominar notações e formas de representação e ainda fazer conexões dentro e fora da Matemática (Ponte, 2005).

Durante a intervenção, as aulas foram essencialmente de caráter exploratório. Esta estratégia de ensino caracteriza-se por estar centrada no trabalho realizado pelos alunos, dando-lhes a oportunidade de aprender de forma mais significativa (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012), desenvolvendo as suas capacidades matemáticas, nomeadamente "a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática" (Canavarro, 2011, p.11). Uma aula de ensino exploratório está habitualmente organizada em três ou quatro fases (Stein *et al.*, 2008 citado em Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p.31). A primeira fase – introdutória- onde a tarefa é apresentada aos alunos, a segunda fase, caracterizada pelo momento de trabalho autónomo dos alunos, onde é explorada e resolvida a tarefa e por fim, a fase de discussão e sistematização. Esta última pode ser ainda dividida em duas partes: a da discussão e a da sistematização, dependendo da forma como a aula é planeada.

Apesar de ser uma aula tipicamente classificada como centrada nos alunos, "não implica necessariamente que os alunos estão no comando da aula a cada momento" (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012, p.264). É importante destacar que, ao longo da aula, vai ocorrendo uma constante diversidade de papéis, quer do professor, quer do aluno. Desse modo, é possível verificar que, enquanto a professora assume destaque na fase de apresentação e sistematização da tarefa, os alunos serão os principais protagonistas, quer na exploração, quer na discussão da tarefa, sendo a professora uma mediadora.

Ao longo das aulas, fui tentando seguir este esquema, com particular atenção nas tarefas com um nível de exigência cognitiva mais elevado. Considero a introdução da tarefa algo de extrema importância, na medida que permite estabelecer um ponto de partida comum a todos os alunos. Era neste momento que aproveitava para rever algum conceito ou conteúdo que fosse estritamente necessário para a resolução da tarefa, bem como algumas dúvidas na interpretação dos enunciados tentando não indicar informações específicas que os levassem a certas resoluções. É neste momento da aula que o professor deve garantir que os alunos "compreendem o objetivo da proposta que lhes é apresentada" (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p.3). Na fase de trabalho autónomo dos alunos, o meu papel foi de monotorização. Neste momento da aula, acompanhei e apoiei os alunos tendo em vista a realização da tarefa (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013), tentando que os meus comentários e respostas não alterassem o nível de exigência cognitiva das tarefas, alertando os alunos para a necessidade de justificar as suas resoluções. Durante esta fase, e sempre que me apercebia que havia alguma dúvida comum à maioria dos alunos, optava por esclarecer em grande grupo para que depois conseguissem seguir o seu trabalho. Na última fase, numa primeira parte, a da discussão, incentivava os alunos a explicar as suas estratégias e resoluções à restante turma, promovendo a qualidade matemática na comunicação quer escrita quer oral nas argumentações apresentadas. Estes momentos são de extrema importância pois permite-lhes clarificar conceitos e procedimentos, expondo as suas conjeturas e conclusões, apresentando as suas justificações e dúvidas uns aos outros (Ponte, 2005). Na segunda parte, a da sistematização, procurava especificar os principais aspetos da tarefa, alertando não só os aspetos a melhorar, como também os bem conseguidos, uma vez que se trata de um momento de "institucionalização das aprendizagens, que toda a turma deve reconhecer e partilhar" (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012, p. 220).

Relativamente à organização dos alunos, estes estavam habituados a trabalhar de forma individual na sala de aula e como consequência disso, o ruído era pouco ou quase inexistente. O trabalho individual é algo que considero essencial, uma vez que permite aos alunos detetar as suas dificuldades, no entanto impossibilita-os de experienciar o trabalho colaborativo e a entreajuda. Assim, e como os alunos "devem ter oportunidade para trabalharem de diferentes formas na aula, individualmente, em pares, em pequeno grupo ou em coletivo" (Ponte & Quaresma, 2011, p. 62) umas das minhas estratégias foi diversificar os modos de trabalho dos alunos. Esta escolha era feita tendo em conta a duração de cada aula bem como o tipo de tarefa proposta aos alunos e o objetivo que pretendia em cada aula.

Ao promover diferentes formas de trabalho em sala de aula, foi um grande risco para mim enquanto professora, uma vez que forcei os alunos a sair da sua zona de conforto, no entanto, " é importante que o professor se disponha a arriscar novas abordagens, ainda que se sinta desconfortável e inseguro de vez em quando" (Ponte & Serrazina, 2000, p.16).

Trabalhar em grupo, possibilita aos alunos apresentar as suas ideias, ouvir os colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, debater e criticar argumentos (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997). Baroody (citado em Nunes, 1996) sublinha que o trabalho em grupo tem potencialidades educativas, na medida em que promove a capacidade de resolução de problemas, de raciocínio matemático e de comunicação matemática, e contribuindo ainda para o aumento da autoconfiança e de capacidades sociais. Ainda no trabalho de Nunes (1996), é possível ler-se que o trabalho em grupo influencia positivamente o aproveitamento escolar dos alunos. Neste sentido, tentei, sempre que possível, formar grupos (pares ou trios) com diferentes níveis de desempenho, tendo especial atenção ao relacionamento interpessoal demonstrado pelos alunos, no decurso das aulas. Ao longo da intervenção, estes grupos foram sofrendo algumas alterações, fruto da mudança da planta de sala de aula (decisão tomada pelo conselho de turma) e dos seus comportamentos, de modo a conseguir melhor orientar os alunos que facilmente se dispersavam do objetivo da aula.

Relativamente aos recursos utilizados, para além daqueles que são regularmente utilizados na sala de aula – as tarefas e o manual dos alunos –, recorri à utilização da tecnologia em sala de aula, nomeadamente à calculadora e ao *software* GeoGebra, através de uma *applet* criada propositadamente para uma das aulas. A utilização da calculadora está inteiramente relacionada com uma das metas exigidas pelo programa de matemática do ensino básico, no entanto, neste mesmo documento pode ler-se que a utilização da calculadora apenas é recomendada em anos escolares mais avançados e sobretudo em situações em que é incentivada a sua utilização, nomeadamente na "determinação de razões trigonométricas ou de amplitudes de ângulos dada uma razão trigonométrica,…" (MEC, 2013, p. 28).

Fernandes, Carvalho e Ribeiro (2007) referem que "o recurso às novas tecnologias permite libertar os alunos de tarefas rotineiras, deixando-lhes mais tempo para explorar, visualizar e interagir" (p.35). Para o NCTM (2008), a tecnologia é essencial no ensino, uma vez que melhora a aprendizagem dos alunos. Relativamente ao GeoGebra, Lopes (2011) indica-nos que este *software* pode minimizar algumas das dificuldades dos alunos, nomeadamente ao nível da exploração visual da figura e da sua construção, permitindo a alteração de dados mantendo as características da figura e ainda aumentando o poder de argumentação uma vez que os alunos podem realizar sucessivos testes e comprovar as suas conjeturas com maior facilidade. A escolha deste *software*, deveu-se, sobretudo, ao facto de ser familiar para os alunos, uma vez que a professora responsável pela turma fazia uso do mesmo; e por permitir uma exploração que em registo escrito seria muito mais exaustivo. Através desta tecnologia os alunos poderiam analisar mais exemplos do que seria possível realizar manualmente, levando deste modo a formular e a explorar conjeturas de uma forma mais fácil (NCTM, 2008).

3.5. As tarefas

Tal como já foi referido anteriormente, uma das estratégias de ensino implementadas na minha intervenção letiva, foi a diversificação de tarefas. Uma das formas de classificar as tarefas é de acordo com o seu nível de desafio e/ou grau de estrutura. Ponte (2005) afirma que:

> As tarefas podem ser de muitos tipos, umas mais desafiantes outras mais acessíveis, umas mais abertas outras mais fechadas, umas referentes a contextos da realidade outras formuladas em termos puramente matemáticos (p.1).

Segundo o mesmo autor, os exemplos de tarefas mais conhecidos são os exercícios, os problemas, as explorações e ainda as investigações. No meu estudo, utilizei os três primeiros tipos de tarefas e contemplei ainda as demonstrações. A escolha do tipo de tarefas a apresentar aos alunos, deverá estar ligada ao tipo de atividade que queiramos que os alunos desenvolvam. Ou seja, quando pretendia que os alunos consolidassem conhecimentos, propunha exercícios, que são caracterizados como tarefas de estrutura fechada e desafio reduzido. Quando pretendia que os alunos conjeturassem e estabelecessem resultados, optava por apresentar explorações, ou seja, tarefas com uma estrutura aberta e desafio reduzido. Por fim, quando pretendia que os alunos desenvolvessem o seu raciocínio matemático, bem como a sua comunicação, particularmente a escrita, mas não menosprezando a oral, propunha não só os problemas (tarefas fechadas, mas com elevado desafio) como também as demonstrações.

Para Skovsmose (2000), as tarefas podem ser classificadas segundo o seu contexto, ou seja, estas podem ser enquadradas em contexto de realidade, em contexto puramente matemático ou ainda em contexto de semi-realidade. Optei apenas por fazer esta diferenciação nos problemas, uma vez que foi esse o foco do meu estudo.

De seguida explicito, de forma detalhada, cada uma das fichas de trabalho propostas ao longo da minha intervenção, fazendo ainda referência a uma tarefa do manual adotado pela escola que considerei de extrema relevância para o meu estudo. Estas não estão numeradas a partir do número 1, pois decidi respeitar a numeração das fichas já entregues aos alunos no decorrer do ano letivo. Tanto as fichas de trabalho como as planificações da maioria das aulas foram realizadas em conjunto com a minha colega de estágio, algumas delas originais e outras retiradas e/ou adaptadas de outros manuais ou materiais disponibilizados pelas diversas editoras.

3.5.1. Ficha de trabalho 10 – *Semelhança de Triângulos*

A primeira ficha de trabalho desta unidade de ensino (Anexo 2) foi proposta aos alunos com o intuito de rever os critérios de semelhança de triângulos. O critério *AA*, seria utilizado diversas vezes ao longo do conteúdo trigonometria, nomeadamente em algumas das demonstrações exigidas aos alunos no programa vigente.

Esta ficha era constituída por quatro tarefas, nomeadamente quatro problemas, que os alunos teriam de resolver com a ajuda de uma ficha informativa (Anexo 2.1), onde eram recordados os três critérios de semelhança bem como um exemplo de cada um deles. O primeiro problema foi idealizado por nós e os restantes retirados do manual *Pi – 2.º volume, 9.º ano*. A primeira tarefa, intitulada de *Motivação*, fazia referência ao matemático Tales de Mileto (646 - 546 a.C.). Sempre que tive oportunidade, fui utilizando a História da Matemática, um tema importante na formação do aluno (Groenwald, Sauer & Franke, 2005), para tentar motivar a sua aprendizagem (Nogueira, 2013). Neste problema, os alunos teriam de calcular a altura de uma pirâmide, da forma que supostamente o matemático resolveu. A resolução desta questão é quase imediata, tendo os alunos de aplicar apenas uma regra de três simples. No entanto, o desafio que se colocava era que os alunos justificassem o porquê de se tratar de uma proporcionalidade, ou seja, que enunciassem corretamente um dos critérios de semelhança, fundamentando a sua escolha.

O segundo problema, questão 1, tinha três alíneas diferentes e pedia que os alunos mostrassem que os três pares de triângulos eram semelhantes. Esta questão induziu em erro, a maioria dos alunos. Existindo três pares de triângulos e três critérios de semelhança, os alunos acharam que não poderia haver repetição de critérios, acabando por usar erroneamente um dos critérios.

O terceiro e quarto problemas, questões 2 e 3, respetivamente, tinham contextos de semi-realidade. Enquanto que na questão 2, à semelhança do primeiro problema, o desafio era justificar corretamente o porquê de ser possível aplicar uma proporcionalidade, o quarto problema, indicado para trabalho de casa, já exigia mais algum raciocínio por parte dos alunos. Nesta questão, os alunos tinham de calcular uma área, de fórmula não imediata, tendo para esse efeito, que recorrer a uma decomposição da figura. Assim, estes teriam primeiramente de justificar a semelhança de triângulos, de seguida, determinar as medidas necessárias e só depois calcular a área pedida, obtida a partir da soma da área de um triângulo com a área de um retângulo ou da soma das áreas de dois trapézios.

3.5.2. Ficha de trabalho 11 – *Razões Trigonométricas*

A segunda ficha de trabalho (Anexo 3) proposta aos alunos tinha como principal objetivo a introdução das razões trigonométricas e era constituída por três partes. Ao entregar a ficha de trabalho, foi indicado aos alunos que esta iria ser realizada faseadamente. Com a primeira parte, onde estavam incluídas as primeiras duas alíneas da questão 1, pretendia-se que os alunos calculassem os três quocientes correspondentes às três razões trigonométricas sem que fosse feita a indicação das mesmas, uma vez que o tópico ainda não tinha sido introduzido. Ainda na primeira parte, na segunda alínea da primeira questão, pretendia-se que os alunos identificassem os catetos de um triângulo retângulo relativamente a um ângulo dado para que, na parte seguinte, terceira alínea da questão 1, fossem apresentadas as definições das razões trigonométricas. A terceira, e última parte, constituída pelas questões 2 e 3, tinha como objetivo a consolidação de conhecimentos. Eram apresentados diversos triângulos retângulos, e os alunos tinham de determinar as razões trigonométricas, identificando os catetos segundo um ângulo dado.

Esta ficha de trabalho foi idealizada para que houvesse uma construção de conhecimento por parte dos alunos, e que a introdução das razões trigonométricas ocorresse de uma forma natural. A questão 1 foi desenvolvida por mim e pela minha colega e as restantes retiradas do manual *Pi – 2.º volume, 9.º ano*.

3.5.3. Ficha de trabalho 12 – *Invariância nas razões trigonométricas*

A terceira ficha de trabalho (Anexo 4) desenvolvida na íntegra por mim e pela minha colega visava estudar algumas das propriedades das razões trigonométricas e foi idealizada como uma tarefa de exploração. Para a realização desta ficha, foi preparado uma *applet* para o GeoGebra de forma que não fosse necessário que os alunos construíssem a figura, uma vez que não era isso que se pretendia com a aula. A figura seguinte ilustra os elementos que os alunos tiveram ao seu dispor, no *software*, para responder às questões:

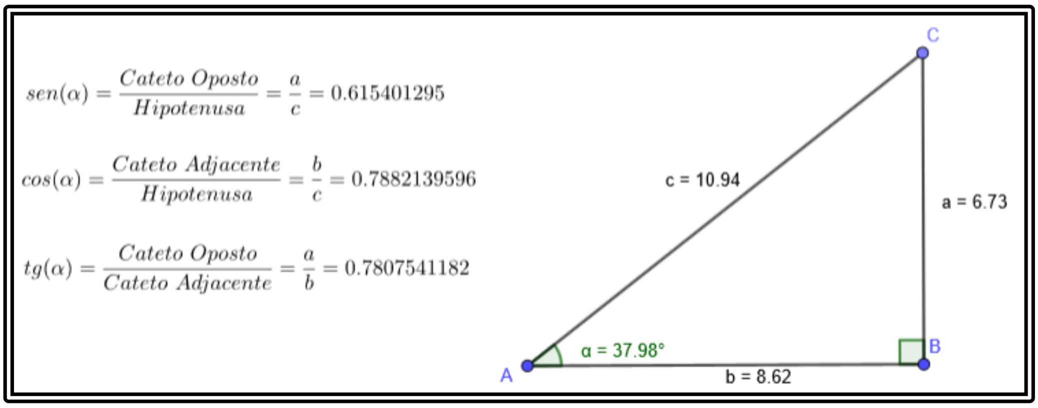


Figura 20 - Applet criada para a resolução da Ficha de Trabalho n.º 12.

Uma vez que os alunos estavam familiarizados com o GeoGebra e tendo em conta que o ficheiro com a construção foi disponibilizado aos alunos, não foi considerado necessário facultar-lhes um guião de utilização. Contudo, foi decidido colocar uma primeira pergunta, em que o objetivo era que explorassem o ficheiro que lhes tinha sido disponibilizado. Neste momento, era objetivo que os alunos se apercebessem que mesmo alterando as posições dos pontos A, B ou C, o triângulo permanecia sempre retângulo em B (devido à construção que tinha sido realizada). Na primeira pergunta, os alunos apenas tinham de identificar o valor do ângulo e das razões trigonométricas de um triângulo retângulo previamente escolhido, que poderia deixar de ser aquele que está apresentado na figura 20, uma vez que os alunos poderiam alterar as posições dos pontos A, B ou C.

Na segunda pergunta, composta por três alíneas, era dada a indicação que os alunos apenas poderiam movimentar o ponto C. Estas três alíneas foram concebidas de modo a que, de forma progressiva, os alunos fossem capazes de perceber que o valor da razão depende da amplitude do ângulo considerado.

Na terceira pergunta, composta por quatro alíneas, à semelhança da questão anterior, era indicado ao aluno que apenas poderia movimentar o ponto B. Agora, estas quatro alíneas, tinham o objetivo de levar os alunos a concluir que o valor de cada razão se mantinha inalterável, pois a cada nova posição do ponto B, era construído um triângulo semelhante ao anterior. Após a exploração destas duas questões, foi feita uma pausa na resolução da ficha para realizar um momento de discussão. Assim, interpelei os alunos com a seguinte questão: *Então, mas porque será que as razões trigonométricas se alteram quando alteramos a posição do ponto C, mas não se alteram quando alteramos a posição do ponto B?* Foi gratificante perceber que o GeoGebra tinha tido um papel crucial na aprendizagem dos alunos.

A quarta e última questão tinha como objetivo que os alunos conjeturassem entre que valores poderiam variar as razões trigonométricas de um ângulo agudo e que no momento posterior (através da resolução de duas tarefas do manual) justificassem matematicamente o porquê.

3.5.4. Ficha de trabalho 13 – *Relações entre as razões trigonométricas*

A quarta ficha de trabalho (Anexo 5), teve como objetivo a exploração do tópico *Fórmula Fundamental da Trigonometria* e *Relação entre a tangente de um ângulo agudo e o seno e o cosseno do mesmo ângulo* (MEC, 2013) e era constituída por quatro perguntas. Foi uma tarefa adaptada do manual *Pi – 2.º volume, 9.º ano*.

Na primeira questão era pedido aos alunos que provassem que os três triângulos apresentados eram retângulos. Assim, esta pergunta tinha dois grandes objetivos: por um lado, reforçar a ideia de que a Trigonometria apenas pode ser aplicada quando estamos a trabalhar com um tipo particular de triângulo, o triângulo retângulo; por outro lado discutir a diferença entre a aplicação do Teorema de Pitágoras e a aplicação do recíproco do Teorema de Pitágoras.

Na segunda pergunta pretendia-se que os alunos determinassem todas as razões trigonométricas pedidas a partir da observação dos triângulos e comparassem a tangente com o quociente entre os valores do seno e do cosseno. Era objetivo da pergunta que os alunos conjeturassem a relação entre a tangente de um ângulo agudo e o seno e o cosseno do mesmo ângulo.

Na questão 3, era pedido que os alunos calculassem a soma dos quadrados do seno e do cosseno de cada um dos ângulos indicados, de forma a conjeturar a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

A quarta e última pergunta, incentivava os alunos a uma investigação, na medida a que os levava a generalizar as relações obtidas anteriormente. Esta investigação foi apoiada com uma tarefa presente no manual dos alunos.

3.5.5. Tarefa do manual – *Determinar distâncias a locais inacessíveis*

Esta tarefa do manual (Anexo 6), foi escolhida como uma das principais tarefas da minha unidade de ensino. É a primeira tarefa de problemas com contextos de realidade e semi-realidade que os alunos realizaram sobre o tópico da Trigonometria. Tendo em conta a qualidade das questões, e uma vez que o manual é uma ferramenta de trabalho, achei importante a sua resolução.

Esta tarefa era constituída por seis perguntas principais, onde o grau de desafio ia aumentando de pergunta para pergunta. A primeira questão, apesar de estar numa seleção de problemas, na minha opinião era um exercício. Pedia-se ao aluno que determinasse a largura do rio, sendo que as condições do problema estavam assinaladas claramente na figura. Na primeira alínea da segunda questão, o enunciado já não era tão claro como o anterior, tendo o aluno de interpretar a informação dada com a figura apresentada. Relativamente à segunda alínea, era de resolução imediata pela observação da figura. A terceira pergunta, remetia à anterior, recordando aos alunos que, a partir do momento que é conhecida a medida de comprimento de dois dos lados de um triângulo retângulo, não é estritamente necessário recorrer à trigonometria para determinar o terceiro lado, bastando para isso aplicar o Teorema de Pitágoras.

Na quarta e quinta perguntas, com um contexto de semi-realidade, o grau de desafio é idêntico. Nas duas questões é pedido aos alunos que calculem a altura do Padrão dos Descobrimentos, em Lisboa e a altura de um edifício, respetivamente. Para isso, os alunos tiveram de determinar duas medidas e depois concluir que a altura pretendida era a soma das duas medidas anteriormente calculadas.

Na sexta e última pergunta, a de grau de desafio mais elevado, os alunos teriam de relacionar duas incógnitas e perceber que seriam necessárias duas equações para poder resolver o problema. Outra das dificuldades era que, sendo um problema de contexto de realidade, alguns alunos tiveram dificuldades em perceber o que era a altura de uma montanha, relativamente ao solo ou ao nível do mar.

Ao longo desta tarefa, o manual faz referência ao Teodolito, um aparelho ótico utilizado principalmente em topografia, que permite medir ângulos verticais e horizontais.

3.5.6. Ficha de trabalho 14 – *Resolução de problemas de exames*

A quinta ficha de trabalho (Anexo 7) foi constituída por problemas de provas nacionais, escolhidos de forma criteriosa por mim, com o objetivo de aplicar os conteúdos abordados até então, trabalhando não só a capacidade de resolução de problemas como também a comunicação matemática. Era composta por quatro problemas, dois dos quais indicados como trabalho extra-aula. Tendo em conta que o meu estudo se centrava na diversidade de contextos na resolução de problemas, escolhi questões de exame com contextos de semi-realidade e contextos puramente matemáticos. Também tive a preocupação de escolher problemas cuja resposta final não dependesse apenas do cálculo de uma medida de comprimento, mas também do cálculo do valor aproximado da amplitude de um ângulo.

Um dos principais objetivos desta ficha de trabalho era que os alunos tivessem conhecimento do tipo de questões que habitualmente surgem em provas nacionais, no tema da trigonometria. Tinha também o objetivo de alertar para a quantidade de informação, muitas vezes em duplicado, entre o enunciado e a figura que o acompanha. Apenas o primeiro problema seguia essa linha de ideias, uma vez que considerei que esse fator colidia com um dos aspetos que queria avaliar nos alunos: a interpretação dos enunciados.

A primeira questão era sobre o farol do Cabo de Santa Maria e de como é que dois amigos tinham procedido para determinar a sua altura. No enunciado são indicadas, em linguagem matemática, informações para a resolução do problema. Em complemento, está ainda representado um esquema com essas mesmas informações. De seguida, é pedido aos alunos que determinem $\overline{MR}$, comprimento esse que representa a distância entre os dois amigos.

Relativamente à segunda pergunta, tem um contexto puramente matemático e as informações necessárias à sua resolução surgem, de forma complementada, sob a forma de linguagem matemática e análise da figura. Este problema tinha um grau de desafio superior ao anterior, uma vez que, entre outros fatores, exigia que os alunos mostrassem que os triângulos eram retângulos, utilizando conteúdos lecionados em anos letivos anteriores. Para além disso, era pedido que os alunos determinassem o valor aproximado da amplitude de um ângulo, algo que a maioria deles considera relativamente mais difícil.

Os problemas indicados para trabalho extra-aula foram o terceiro e o quarto. À semelhança dos dois anteriores, tinham dois contextos distintos, puramente matemático e de semi-realidade, respetivamente. No terceiro problema pretendia-se que o aluno determinasse a área de um semicírculo, utilizando a trigonometria, relacionando a área de um círculo com a de um semicírculo, o raio com o diâmetro e que em todo este processo apresentasse todas as justificações necessárias, desenvolvendo diversas capacidades matemáticas.

Por fim, o quarto problema tinha como pano de fundo uma central termoelétrica com duas chaminés situada em São Torpes, no concelho de Sines. Neste problema, era novamente pedido o valor da amplitude de um determinado ângulo e para isso os alunos teriam de realizar, no mínimo, três cálculos intermédios. Esta questão tinha um grau de desafio elevado e pretendia analisar, se os alunos em trabalho extra-aula e de forma autónoma eram capazes de construir uma estratégia de resolução eficaz.

Nos problemas desta ficha, à exceção do terceiro, era dada uma sugestão de resolução, algo que acabava por alterar ligeiramente o nível de desafio inicial da tarefa.

3.5.7. Ficha de trabalho 15 – *Resolução de Problemas na Trigonometria*

A sexta e última ficha de trabalho (Anexo 8) não foi realizada na sua totalidade em sala de aula. Foi idealizada para que os alunos aplicassem os conceitos anteriormente trabalhados, desenvolvessem a capacidade de resolução de problemas, mas também a sua capacidade de comunicação e argumentação matemática, servindo também como uma preparação para a ficha de avaliação. Como tal, foram disponibilizadas as soluções no rodapé do enunciado. Esta ficha, constituída por dez problemas, foi também uma compilação de problemas tipo, que foram surgindo ao longo da minha intervenção letiva.

Na primeira pergunta, pretendia-se que o aluno, a partir do valor do cosseno de um ângulo agudo, determinasse, utilizando a Fórmula Fundamental da Trigonometria e a relação entre a tangente de um ângulo agudo e o seno e o cosseno do mesmo ângulo, o valor exato do seno e da tangente. Posto isto, pretendia-se que os alunos calculassem o valor exato de duas expressões que envolviam a tangente e o seno.

A segunda pergunta, um problema com um contexto de semi-realidade, remetia para o Templo Expiatório da Sagrada Família de Barcelona. Era um problema idêntico a um dos que tinham sido trabalhados na tarefa do manual (Anexo 6). Para determinar a altura do monumento, os alunos tinham que primeiramente determinar duas alturas parciais. Semelhante a um dos problemas trabalhados na tarefa do manual, era também a quarta pergunta. Na presença de duas incógnitas, os alunos deveriam ser capazes de formular um sistema de equações de forma a dar resposta ao problema.

Na terceira pergunta, um problema de contexto puramente matemático, pretendia-se que os alunos mobilizassem conhecimentos tais como, o recíproco do Teorema de Pitágoras, a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares, e ainda a diferença entre determinar a razão trigonométrica a partir da amplitude do ângulo e determinar a amplitude do ângulo a partir de uma razão trigonométrica.

Nas questões 5 e 8, eram pedidas provas aos alunos, ou seja, aquilo que habitualmente foi designado por demonstrações. Ao longo da intervenção, foram surgindo algumas tarefas deste tipo, e o desconforto e insegurança eram frequentemente demonstrados pelos alunos. Coloquei este tipo de questões na ficha com o intuito de tentar minimizar esses sentimentos dos alunos, fazendo-os sentir que era uma pergunta como outra qualquer. Na pergunta 5, pretendia-se que os alunos determinassem cada um dos produtos, partindo da observação da figura. A pergunta 8 tinha como objetivo que os alunos monitorizassem as relações entre as razões trigonométricas estudadas em aula. Esta pergunta acabou por fomentar uma pequena discussão em aula, uma vez que nem todos os alunos seguiram o mesmo processo, surgindo assim diversas formas de resolução.

As questões 6, 7, 9 e 10 não foram resolvidas em sala de aula. Relativamente à pergunta 6, a sua resolução era exaustiva, uma vez que havia necessidade de efetuar diversos cálculos para poder dar a resposta ao problema. Tinha como objetivo que os alunos recordassem a obrigatoriedade de o triângulo em estudo ser retângulo e que tentassem minimizar a quantidade de cálculos efetuados.

A questão 7 e a 10, problemas com contextos puramente matemáticos, tinham como base uma circunferência e como objetivo que os alunos relacionassem a trigonometria com outros tópicos da geometria, nomeadamente no cálculo de perímetros e áreas de figuras geométricas.

Por fim, a questão 9, um problema com um contexto de semi-realidade. Estava na linha dos problemas das provas nacionais, no entanto não apresentava qualquer sugestão de resolução. Pretendia-se que o aluno, nesta fase da aprendizagem, fosse capaz de construir um raciocínio matemático, sem ser necessário alguma indicação.

3.6. Avaliação

Segundo o programa e metas curriculares, a avaliação deverá ser "diversificada e frequente, contribuindo, assim, para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de aprendizagem." (MEC, 2013, p. 29) Segundo o NCTM (1999) a avaliação deverá refletir a Matemática que todos os alunos devem saber e ser capazes de fazer, devendo ainda melhorar a aprendizagem e promovendo a igualdade, transparência e coerência.

Durante a intervenção, implementei duas modalidades de avaliação: formativa e sumativa. Como avaliação sumativa foi preconizado dois instrumentos: uma ficha de avaliação (Anexo 9), realizada no final da lecionação da Unidade Didática e ainda uma questão-aula (Anexo 10), realizada na semana antes da ficha de avaliação.

Para a ficha de avaliação foram preparados exercícios, demonstrações e problemas de contextos diversificados, apresentados em itens de resposta fechada e aberta. Antes de falar um pouco sobre cada uma das questões, é importante referir que, esta ficha de avaliação, incidia não só sobre o tema de Trigonometria, mas também sobre os temas de Probabilidade e Inequações. Das 16 perguntas que a constituíam, apenas nove eram sobre os conteúdos da Unidade Didática que tinha lecionado, sendo que destas nove, duas eram de escolha múltipla.

As questões 3 e 8 eram perguntas de aplicação direta das definições das razões trigonométricas, uma em que pretendia que os alunos determinassem um valor aproximado de uma medida de comprimento e noutra, o valor aproximado da amplitude de um ângulo. Nestas duas questões, o seu contexto era de semi-realidade. Relativamente às perguntas de escolha múltipla (questões 1 e 13), na primeira, pretendia-se avaliar se os alunos tinham compreendido o intervalo em que os valores das razões trigonométricas podem variar; e na segunda (questão 13) testar conhecimentos sobre a relação entre o $seno$ e o $cosseno$ de ângulos complementares.

Abordando agora as questões que envolviam um raciocínio matemático mais complexo, começo por referir as perguntas 6 e 16, em que era necessário a utilização das relações entre as razões trigonométricas. Na questão 6, com vista a determinar o valor exato de outras razões trigonométricas a partir do conhecimento de uma delas; e a questão 16 para realizar uma demonstração. A pergunta 10, com um contexto puramente matemático, exigia a aplicação do recíproco do Teorema de Pitágoras e ainda as definições das razões trigonométricas. Uma das dificuldades desta pergunta, era a complexidade da figura, constituída por dois triângulos, parcialmente sobrepostos.

Por fim, as questões 7 e 15, com contextos de semi-realidade em que os havia a necessidade de interpretar corretamente o enunciado, de modo a conseguir apresentar a resposta ao problema. Em especial, a questão 15, exigia a formulação do problema através de um sistema de equações, bem como o conhecimento sobre os valores exatos das amplitudes dos ângulos de referência.

Relativamente à questão-aula, esta era composta por cinco questões: três exercícios e dois problemas, todos de resposta aberta e sendo que um dos problemas era retirado das provas nacionais de 3.º Ciclo. Nas duas primeiras tarefas, pretendia-se a aplicação direta da definição da razão trigonométrica. No entanto, existia uma distinção entre estas: na primeira os alunos tinham de determinar a medida de um comprimento; na segunda era indicado que calculassem o valor aproximado da amplitude do ângulo, e nesse sentido, a necessidade de utilização do $arcsen$. Durante a elaboração deste instrumento de avaliação, optei por colocar as questões por ordem crescente de dificuldade. Consequentemente, a pergunta três tinha um nível de dificuldade superior às duas primeiras, na medida em que, para além de os alunos terem de aplicar as definições das razões trigonométricas, teriam de interpretar a figura de forma a poder dar a resposta pretendida.

A quarta pergunta remetia à utilização das relações entre as razões trigonométricas e foi aquela em que os alunos evidenciaram mais dificuldades. Para além de alguns erros na resolução de equações de 2.º grau, foram escassos os alunos que justificaram a escolha da solução positiva em detrimento da negativa. Por fim, a quinta questão, aquela que eu considerei ser a tarefa com um grau de desafio superior. Os alunos teriam que, para além de realizar uma mobilização de conhecimentos sobre Trigonometria, interpretar corretamente o enunciado do problema, bem como revelar conhecimentos sobre arredondamentos e casas decimais. Para além disto, sendo um problema com contexto de semi-realidade, os alunos teriam de dar a resposta ao problema, de acordo com a situação.

Segundo o NCTM (2008):

> A avaliação deverá ser mais do que um teste no final do período de ensino, com o intuito de verificar o desempenho dos alunos perante determinadas condições; ela deverá constituir uma parte integrante do ensino, que informa e orienta os professores nas suas decisões. A avaliação não deverá ser meramente feita aos alunos; pelo contrário, ela deverá ser feita para os alunos, para os orientar e melhorar a sua aprendizagem. (p.23)

Nesse sentido, ao longo das aulas, privilegiei a avaliação formativa/reguladora visto que, para além de poder ser entendida como um processo do ensino e aprendizagem dos alunos, ajudou-me apoiar a prática letiva, na medida em que me permitiu interpretar e compreender como é que estavam os alunos relativamente aos seus conhecimentos (Santos, 2008). Vários foram os instrumentos da avaliação formativa utilizados, passando a enumerá-los de seguida.

Recorri ao questionamento oral, que segundo Santos e Pinto (2018) é a prática mais comum em sala de uma, uma vez que recorre à forma mais habitual de comunicação entre o professor e o aluno. Este instrumento ia-me fornecendo, ao longo das aulas, uma ideia do conhecimento e compreensão que os alunos estavam a desenvolver. Teve um papel crucial ao longo da intervenção, pois era através dela que ia adaptando as aulas às suas necessidades de modo a que a aprendizagem matemática fosse melhorada.

Um outro instrumento de avaliação formativo foi o *feedback* escrito às produções dos alunos. À semelhança do instrumento anterior, este também era realizado por dois principais fatores: o primeiro que era fornecer aos alunos informações sobre as suas resoluções, alertando não só para aquilo que poderia ser melhorado, mas também o que tinha sido bem conseguido. Nos comentários realizados, tentei sempre que possível incentivar os alunos a reanalisar a sua resposta, utilizando uma linguagem acessível, sem tecer qualquer comentário depreciativo. O segundo fator, agora para mim como professora, é que me permitia refletir sobre os resultados da aprendizagem dos alunos, tarefa após tarefa.

A questão aula, para além de instrumento de avaliação sumativa, teve também um cariz formativo. Esta foi realizada na semana anterior à ficha de avaliação, algo que é habitualmente feito pela professora responsável da turma. Para além de ter sido dado um *feedback* escrito às produções escritas dos alunos, a apresentação da sua resolução foi feita em forma de discussão em grupo turma, onde os alunos iam sendo alertados para os erros mais frequentes, bem como a necessidade de melhorar a sua comunicação e argumentação matemática.

Todas as informações anteriores eram complementadas com a observação direta realizada por mim e com uma grelha de participações dos alunos, com o preenchimento a cargo da minha colega, onde eram contabilizadas as intervenções dos alunos, nomeadamente as idas ao quadro e as respostas orais às minhas perguntas.

3.7. Aulas lecionadas

3.7.1. Aula 1 – *14 de fevereiro*

A minha intervenção letiva iniciou-se dia 14 de fevereiro de 2019 numa aula com duração de 90 minutos (2×45 minutos). Foi planificada (Plano de aula: Anexo 11) tendo em conta dois grandes momentos: a revisão sobre os critérios de semelhança de triângulos e a introdução ao estudo da trigonometria. Cada um destes momentos foi, não só apoiado com uma apresentação *PowerPoint* (Anexo 11.1), mas também com uma ficha de trabalho (Anexo 2 e Anexo 3).

Assim sendo, para esta aula foi planificada a resolução de duas fichas de trabalho e uma atividade do manual. No entanto, os alunos realizaram a atividade e a ficha de trabalho relativamente à semelhança de triângulos; sendo que a ficha sobre a introdução das razões trigonométricas ficou inacabada. Tendo isto em consideração, constata-se que o plano de aula não foi cumprido, provavelmente devido à sua extensão. Contudo, a extensão do mesmo será algo recorrente ao longo da intervenção, sendo uma consequência de uma decisão tomada antes do início da intervenção. Devido às diferenças entre os alunos, optou-se por colocar sempre mais atividades do que aquelas que seriam, provavelmente, trabalhadas em sala de aula, com o objetivo de nunca existir alunos sem algo para fazer que tivesse sido previamente pensado.

No geral, considero que a aula correu bem, no entanto, existem alguns aspetos durante esta primeira intervenção que poderiam ter sido melhorados. Alguns deles são consequência do nervosismo característico da situação em si, outros devido à reação que os alunos iam tendo nos diversos momentos da aula.

Um dos aspetos menos conseguidos ocorreu durante a revisão dos critérios de semelhança de triângulos. Neste momento de trabalho autónomo, os alunos tinham ao seu dispor um resumo sobre os critérios de semelhança. Optei apenas por referir oralmente, com ajuda dos alunos, quantos e quais os critérios. No entanto, após o final da aula, apercebi-me que teria sido mais proveitoso ter despendido tempo para rever com um maior cuidado todos esses critérios e a sua forma de utilização, uma vez que os alunos manifestaram grandes dificuldades na aplicação dos mesmos.

Tendo em conta que este momento da aula era apenas uma revisão de conteúdos dados anteriormente, não estava à espera de que os alunos demonstrassem tantas dificuldades como aquelas que foram evidenciadas. Neste sentido, impossibilitou-me de, durante a correção da ficha de trabalho, proporcionar uma discussão em grupo turma mais significativa. Apesar de haver alunos a participar, a maioria demonstrava uma atitude de incerteza e receio em responder. Após a correção e discussão, acho que este conteúdo ficou clarificado e os alunos atingiram o objetivo de aprendizagem. Foi possível contatá-lo uma vez que foi enviado como trabalho de casa um problema onde os alunos teriam de aplicar e justificar o critério de semelhança e, a maioria, resolveu corretamente.

Um outro aspeto menos conseguido, está relacionado com os momentos de sistematização das ideias no quadro, em grupo turma. Durante a aula, não reparei que, ao promover o trabalho autónomo dos alunos a pares, houve alunos que ficaram sentados de costas para o quadro, algo que teria de ser corrigido nas aulas seguintes.

O segundo momento da aula, foi um dos que achei bem conseguidos. Optei por mostrar situações em que não era possível aplicar a semelhança de triângulos. De forma a cativar a atenção dos alunos e a mostrar a utilidade do tópico da trigonometria, recorri a alguns monumentos e estátuas do colégio, questionando-os como é que seria possível calcular essas medidas ditas inacessíveis e posteriormente elucidando-os que seria a trigonometria a dar resposta a este tipo de problemas. Os alunos demonstraram grande entusiasmo quando lhes foi dito que, no final da unidade, eles teriam oportunidade de determinar a medida de cada uma destas situações.

No geral, a aula correu como planeado e, embora a planificação não tenha sido cumprida, os objetivos de aprendizagem que tinham sido delineados foram e isso foi visível através das produções escritas e orais da maioria dos alunos. Ao longo da aula tentei apoiar e orientar os alunos nas tarefas propostas e algumas vezes senti que havia alunos que não estavam focados, no entanto procurei sempre incentivá-los a continuar a trabalhar.

As minhas principais dificuldades foram ao nível da gestão do tempo, pelo facto de ter notado grandes dificuldades na resolução da primeira ficha de trabalho, permiti que o tempo previamente estipulado para esta atividade fosse alterado, acabando por se repercutir na restante aula; a divisão entre a atenção dada aos alunos, nomeadamente no esclarecimento das suas dúvidas, e atenção à resolução que ia sendo realizada no quadro; na gestão das discussões e sistematizações, na medida em que algumas vezes é difícil ouvir alguns alunos, impossibilitando a utilização das suas ideias para novas discussões ou esclarecimentos; e ainda, ao próprio modo de trabalho dos alunos, antes e no próprio momento da aula. Antes, relativamente à escolha dos grupos, tendo em atenção a heterogeneidade, mas sem que isso proporcionasse uma grande alteração de mesas dentro da sala; e durante a aula, devido ao barulho que este modo de trabalho gera.

3.7.2. Aula 2 – *19 de fevereiro*

A segunda aula da intervenção, com duração de 90 minutos (2×45 minutos), foi planificada (Plano de aula: Anexo 12) tendo em conta dois grandes momentos: a consolidação dos conceitos de $seno$, $cosseno$ e $tangente$ (este momento da minha responsabilidade) e o esclarecimento de dúvidas dos alunos para a ficha de avaliação de matemática que se iria realizar neste dia (responsabilidade da professora da turma). Caso os alunos não apresentassem dúvidas, estava previsto no plano de aula a realização de exercícios do manual sobre trigonometria. Tendo em conta que a ficha de trabalho n.º11 (Anexo 3), idealizada para a aula anterior, não tinha sido concluída, o primeiro momento da aula foi composto pela revisão das conclusões sobre as razões trigonométricas e realização dos exercícios dessa ficha para consolidação dos conteúdos.

De um modo geral considero que a aula correu bem, no entanto existem alguns aspetos a salientar e a melhorar nas aulas seguintes que especifico de seguida.

Para o momento de revisão e sistematização das ideias abordadas na aula anterior, optei por incluir os alunos, procurando interpelá-los utilizando perguntas pensadas previamente. Neste momento, foi notório o empenho de alguns alunos, no entanto, ao não ter direcionado as minhas perguntas e/ou não ter exigido que os alunos levantassem a mão antes de responder, fiquei sem perceber se os conteúdos tinham sido assimilados por toda a turma ou apenas por uma minoria de alunos.

Após esta primeira parte da aula, foi indicado aos alunos que continuassem a realizar a ficha de trabalho iniciada na aula anterior. Optei por que este momento de trabalho autónomo dos alunos fosse realizado individualmente, primeiro porque considerei que seria importante que cada aluno reconhecesse se, tinha ou não, assimilado os novos conteúdos e segundo, porque apenas 45 minutos da aula seriam da minha responsabilidade. Em virtude disso, o barulho em sala de aula, comparativamente à aula anterior, foi quase inexistente, algo que me fez refletir sobre que modo de trabalho deveria prevalecer. Algumas frases permaneciam na minha mente nas quais eu ainda não tinha uma resposta definida: Será o trabalho individual mais proveitoso para os alunos? Ou será que foi apenas uma má formação de pares, realizada por mim? Deverei considerar que o barulho é normal, uma vez que os alunos estarão a discutir sobre a tarefa? Apesar de tudo isto, optei por que na aula seguinte, os alunos iriam de novo, trabalhar a pares.

Durante a monotorização do trabalho autónomo dos alunos, tentei incentivá-los a utilizar, pelo menos nestes primeiros exercícios, a sistematização realizada quer nesta aula, quer na aula anterior, de modo a realizarem os exercícios com mais facilidade. Foram surgindo algumas dúvidas pontuais e uma das mais recorrentes foi nas alíneas $c)$ e $d)$ do exercício 2, onde era pedido aos alunos que determinassem as razões trigonométricas dos dois ângulos agudos do triângulo. Vários alunos perguntaram como é que um dos lados do triângulo poderia ser cateto oposto e cateto adjacente simultaneamente. Esclareci a dúvida aos alunos, porém acho que poderia ter aproveitado esta dúvida para criar um momento de discussão em grupo turma, enfatizando a importância de referir a que ângulo estamos a referir.

Finalizando este momento da aula, os últimos 45 minutos foram ocupados a esclarecer as dúvidas dos alunos relativamente aos temas de funções, equações e semelhança de triângulos, conteúdos estes que os alunos tinham sido avisados que vinham para o teste. Dois alunos da turma não demonstraram dúvidas, pelo que foram indicados os exercícios sobre trigonometria, do manual, para realizarem.

No geral, a aula correu como planeado e quer a planificação quer os objetivos de ensino foram cumpridos. Os alunos revelaram um comportamento exemplar e acho que, no geral, os conteúdos foram assimilados. Saliento como outro aspeto a melhorar a importância de incentivar o aluno que vai ao quadro apresentar a sua resolução, a explicar o seu raciocínio, mesmo em tarefas com um grau de dificuldade inferior.

3.7.3. Aula 3 – *21 de fevereiro*

Esta terceira aula, com duração de 90 minutos (2×45 minutos), foi planificada (Plano de aula: Anexo 13) tendo em conta dois grandes momentos: a revisão dos conceitos de $seno$, $cosseno$ e $tangente$ e a realização de uma tarefa de exploração – Ficha te Trabalho nº 12: Invariância nas razões trigonométricas (Anexo 4) realizada com o apoio do *software* GeoGebra. Relativamente a este segundo momento, a expectativa era enorme. Tinha sido uma atividade preparada minuciosamente para que os alunos, de forma autónoma, inferissem certas propriedades das razões trigonométricas.

O nervosismo para esta aula, estava quase ao mesmo nível da primeira da minha intervenção. Eram tantas as coisas que poderiam não correr bem. Os alunos iriam trabalhar a pares, realizar uma tarefa de exploração e ainda utilizar a tecnologia através de um *tablet*, que eram três aspetos com que os alunos não estavam familiarizados. Assim, seria uma aula com um grande nível de desafio, não só para os alunos, mas também para mim como professora.

A primeira parte da aula correu muito bem, os alunos realizaram os exercícios que tinham sido propostos e durante esse trabalho autónomo, fui tentando perceber se ainda existiam dúvidas sobre a resolução deste tipo de exercícios e de um modo geral, pareceu-me que os alunos tinham assimilado este conteúdo e que assim, poderia avançar na aula.

Para iniciar o segundo momento da aula, comecei por entregar os *tablets* aos alunos e, logo a partir desse momento, as suas atitudes mudaram completamente. Houve problemas com alguns *tablets*, mas felizmente estava preparada para essa eventualidade. E a aula seguiu. O trabalho autónomo teve a duração de cerca de vinte e cinco minutos, próximo do previsto. Os alunos mostraram-se interessados em resolver a ficha de trabalho e o facto de haver apenas um enunciado e um *tablet* por grupo fez com que houvesse uma grande interação entre os elementos de cada grupo. Também como consequência disso, o aumento do barulho em sala de aula. Porém, os alunos estavam, efetivamente concentrados na tarefa e o barulho era apenas uma boa consequência disso.

Da observação do trabalho autónomo reparei que a maioria dos alunos estavam a concluir os resultados que pretendia, no entanto, estavam a ter algumas dificuldades não só ao nível das justificações pedidas, mas também ao manusear a tecnologia. De forma a tentar colmatar essa situação, ao longo da monitorização fui ajudando os alunos com algumas dicas de forma a que fossem atingindo os objetivos e, consequentemente, todos os grupos, alguns de uma forma mais completa que outros, chegaram às conclusões pretendidas.

A correção e sistematização das primeiras três perguntas foram realizadas oralmente e em grupo turma. Durante esta fase de discussão, e contrariamente àquilo que tinha ocorrido na aula anterior, indiquei aos alunos que não deveriam responder sem que eu desse autorização e, para isso, deveriam levantar o braço. Nem todos os alunos respeitaram essa indicação, pelo que continua a ser um aspeto a melhorar. Apesar disso, foi um momento bastante enriquecedor para todos, na medida em que foram trocadas e complementadas ideias sobre cada uma das alíneas. Tive em atenção, e ao longo das alíneas, ir desenhando no quadro as diversas situações para que todos os alunos fossem visualizando mais facilmente. Para finalizar este grupo de perguntas, coloquei uma questão síntese a toda a turma: "Então, mas porque razão as razões trigonométricas se alteram quando movimento o ponto C e não se alteram quando movimento o ponto A ou o ponto B?" e fiquei muito feliz uma vez que, não só tive vários alunos que estavam muito perto da justificação, como um deles concluiu aquilo que eu pretendia.

Os últimos dez minutos da aula foram destinados à resolução e correção/discussão da pergunta 4 onde os alunos, não só perceberam aquilo que pretendia através do GeoGebra, mas também conseguiram apresentar uma justificação.

A tecnologia teve um papel crucial nesta aula. Sem a sua utilização, acredito que tinha sido muito mais difícil que os alunos concluíssem alguns dos resultados. Sei que a sua utilização será sempre um grande desafio para mim, enquanto professora, no entanto, acredito que as vantagens serão sempre superiores às desvantagens.

No geral, a aula correu como planeado os objetivos de aprendizagem foram atingidos. Não consegui cumprir, na totalidade aquilo que tinha previsto, no entanto senti que foi uma tarefa significativa para os alunos. Relativamente ao comportamento, tenho noção que ao colocá-los a trabalhar em grupo, o ruído em sala de aula aumentou, no entanto não considero que neste caso, tenha sido algo negativo, uma vez que reparei que os alunos estavam a discutir ideias e procedimentos. Saliento por fim, que foi importante para mim a evolução que alguns alunos demonstraram nesta aula. O nível de justificação exigido em algumas das perguntas era significativo e sentir que houve alunos capazes de atingir esse patamar foi bastante satisfatório.

3.7.4. Aula 4 – *25 de fevereiro*

A quarta aula da minha intervenção (Plano de aula: Anexo 14) teve a duração de 45 minutos e sei que foi uma das mais difíceis para os alunos. Tinha como principal objetivo a generalização dos resultados obtidos na pergunta 4 da Ficha de Trabalho n.º12 (Anexo 4), bem como a demonstração da propriedade: ângulos de igual amplitude têm o mesmo $seno$, $cosseno$ e $tangente$. Era uma aula de grande exigência para os alunos, na medida em que se pretendia que desenvolvessem a sua capacidade argumentativa, de abstração e de demonstração, nas quais revelam sempre grandes dificuldades.

A primeira atividade desta aula, pretendia que os alunos justificassem que o $seno$ de α e o $cosseno$ de α eram números positivos, menores do que 1. Este era um resultado que já tinha sido abordado na aula anterior e que a maioria dos alunos tinha percebido como justificar. Um aluno, de forma voluntária, quis apresentar a sua resposta e estava totalmente correta. Devido a uma questão de tempo, e após discutir com a turma as ideias principais da resolução do aluno, decidi ditar a resolução para que todos os alunos tivessem a resposta correta no seu caderno diário.

A segunda atividade desta aula, pressuponha que os alunos percebessem que em que valores poderia variar a tangente de um ângulo agudo. Tendo em conta que a tarefa do manual estava feita de forma simples e de fácil entendimento, os alunos não tiveram dificuldade em percebê-la. Assim, aproveitei a oportunidade para enriquecer a atividade, incentivando os alunos a justificar cada uma das alíneas.

A última atividade da aula, consistia em provar que ângulos de igual amplitude têm o mesmo $seno$, $cosseno$ e $tangente$. Ao indicar que deveriam realizar a atividade 5 do manual e ao ler o seu objetivo, um aluno da turma fez o reparo que este resultado tinha sido visto na aula passada utilizando o GeoGebra. Esta participação do aluno deixou-me bastante contente uma vez que me permitiu iniciar a demonstração de uma forma natural e de algo que os alunos já estavam minimamente familiarizados: a semelhança de triângulos. Os alunos lembraram-se qual tinha sido o critério de semelhança utilizado e depois, com uma pequena orientação conseguiram chegar ao resultado pretendido. Antes de acabar a aula, dei ainda alguns momentos aos alunos para tentarem demonstrar as alíneas b) e c) que eram praticamente semelhantes àquela que tinha sido realizada na primeira alínea.

No geral, e apesar da enorme capacidade de raciocínio neste tipo de tarefas, a aula correu bem. Para a planificação desta aula foi importante refletir sobre as dificuldades que os alunos poderiam demonstrar e tentar preparar questões/sugestões que os encaminhassem de forma a os não desmotivar.

3.7.5. Aula 5 – *28 de fevereiro*

A quinta aula da minha intervenção letiva teve a duração de 90 minutos (2×45 minutos). Esta foi planificada (Plano de aula: Anexo 15) tendo em conta três momentos: a utilização da calculadora e da tabela de valores trigonométricos, a determinação dos elementos de triângulos retângulos e por fim a resolução de problemas com diversidade de contextos. Como é possível observar, o plano para esta aula foi demasiado ambicioso, e como tal não foi cumprido.

Para suporte desta aula, foi preparada uma apresentação *PowerPoint* (Anexo 15.1), pois como iria explicar aos alunos como calcular o valor das razões trigonométricas a partir do valor da amplitude do ângulo e vice-versa, achei que seria mais fácil para se fosse mostrando que teclas deveriam ser usadas e consequentemente, quais os passos a realizar, um dos aspetos que considerei bem conseguidos da aula. O projetor da sala da turma nunca tinha deixado de funcionar ao longo deste ano letivo e qual foi o meu espanto quando me apercebi que este não estava a funcionar. Tentei, ainda que inutilmente, arranjá-lo e acabei por chamar um funcionário que não também não conseguiu resolver o problema. Assim, depois de perder algum tempo, continuei a aula utilizando apenas o ecrã do computador da sala. Este foi um dos aspetos que contribuiu para o atraso da aula. Nas aulas seguinte, tive uma maior preocupação neste sentido e passei a trazer o computador pessoal para alguma eventualidade.

Durante a monitorização do trabalho autónomo, reparei que vários alunos continuavam a ter problemas com a simbologia, quer ao não utilizar corretamente os sinais de " $=$ " e " $\approx$ ", quer na passagem de, por exemplo, $sen\ \alpha = 0{,}531$ para $\alpha \approx 32{,}1°$. Assim, optei por explicar estas situações no quadro para todos, algo que considero um dos aspetos positivos desta aula. Ainda nestes exercícios, chamei à atenção para a importância dos parêntesis ao determinar através da calculadora, por exemplo, $cos\,\alpha = \frac{3}{7}$, evidenciando a diferença entre $cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$ e $\frac{cos^{-1}3}{7}$. Porém, apesar de ter referido oralmente qual a opção correta, deveria ter assinalado também no quadro, por exemplo com uma cruz em cima daquilo que não deveria ser feito.

No segundo momento da aula que consistia em resolver exercícios onde os alunos teriam de calcular os elementos de um triângulo retângulo, comecei por através de um exemplo do manual, explicar-lhes como é que deveriam proceder neste tipo de situações. Ao terminar o exemplo e ao confrontar os alunos se tinham percebido, optei por realizar um segundo exemplo pois apercebi-me que ainda não estava claro para todos os alunos. Nesse sentido, acho que é extremamente importante para o professor, preparar-se para este tipo de situações e ter sempre “algo na manga”, para minimizar ao máximo as dificuldades dos alunos.

Após a explicação, indiquei que resolvessem o resto da atividade 10 e vários alunos tiveram dificuldades, uma vez que não se recordavam das definições das razões trigonométricas. Nesse sentido, indiquei que consultassem os seus apontamentos. Esta dificuldade foi evidenciada pelos alunos que voluntariamente foram resolver as restantes alíneas ao quadro. Durante a resolução chamei ainda à atenção para utilizarem as letras das figuras. Após a apresentação das resoluções no quadro, os cinco minutos seguintes foram reservados à exploração de uma tarefa onde o triângulo era isósceles e onde as razões trigonométricas não podiam ser aplicadas à partida. Considero que foi um momento rico para os alunos e que a maioria percebeu aquilo que foi realizado. No entanto, algumas noções como a altura de um triângulo e ponto médio, poderiam ter sido mais esclarecidas.

Acho que, no geral, os alunos entenderam aquilo que se pretendia e ganharam ferramentas para a resolução de problemas com diversos contextos.

A aula exigia um grande empenho dos alunos para que corresse da melhor forma e foi isso que aconteceu. Apesar do grande cansaço acusado pelos alunos (devido aos preparativos do aniversário do Colégio), os objetivos de aprendizagem foram atingidos. No entanto a gestão do tempo continua a ser um aspeto, da minha parte, a ser melhorado.

3.7.6. Aula 6 – *11 de março*

A sexta aula da minha intervenção (Plano de aula: Anexo 16) teve a duração de 45 minutos e foi a primeira aula em que os alunos, autonomamente, resolveram problemas com contextos de realidade e de semi-realidade. Estava proposto a resolução e discussão de seis problemas, no entanto foram trabalhados e corrigidos, cinco deles. De modo que, pode-se concluir que o plano de aula não foi cumprido. Nesta aula, o mais importante para mim, era que os alunos compreendessem a real diferença entre resolver um exercício e resolver um problema e, relativamente a isso, considero que o objetivo foi cumprido.

Antes de passar a alguns dos aspetos da aula, é importante referir que esta foi lecionada após uma semana de férias dos alunos. Seria de esperar dúvidas acrescidas relativamente aos tópicos de Trigonometria, no entanto, durante o trabalho autónomo dos alunos, fui-me apercebendo que estes iam recorrendo aos seus apontamentos e a mnemónicas com o intuito de minimizar esses esquecimentos pontuais.

Na aula anterior já tinha resolvido, com a ajuda dos alunos, o primeiro problema. No entanto, como foi já no final da aula, optei por pedir a um aluno que viesse resolvê-lo de novo, ao quadro. Neste momento, deveria ter pedido ao aluno que explicasse o seu raciocínio aos restantes alunos, em complemento àquilo que tinha escrito no quadro.

Durante a monitorização, senti que os alunos tiveram algumas dificuldades na resolução destas tarefas. E a própria natureza da tarefa, foi uma das dificuldades. Era necessário, para além dos conhecimentos de Trigonometria, que os alunos interpretassem e compreendessem aquilo que era pedido, e essas, foram as grandes dúvidas. Outra das dificuldades deste tipo de tarefas, que considero mais um esquecimento do que uma dificuldade, é o facto de os alunos não apresentarem as respostas aos problemas. Algo que fui referindo ao longo da aula.

Relativamente ao trabalho autónomo dos alunos e, apesar de ter sido uma aula de 45 minutos, optei por colocá-los a trabalhar a pares. Considero que este aspeto foi benéfico para a maioria dos alunos. Sendo a primeira vez que estavam em contato com este tipo de tarefas na área da Trigonometria, acredito que foi importante as interações e troca de ideias que os alunos iam realizando.

Por fim, considero que consegui fazer uma boa gestão de aula, nomeadamente na divisão da atenção entre aquilo que estava a ser feito no quadro e as dúvidas dos alunos.

Considero que a aula atingiu os objetivos de ensino que tinha estipulado e permitiu-me perceber que os alunos, ao trabalharem a pares, revelam uma maior autonomia comparativamente às aulas em que trabalham individualmente, apesar de ter como consequência, o aumento de ruído em sala de aula.

3.7.7. Aula 7 – *12 de março*

Para esta aula (Plano de aula: Anexo 17) com duração de 90 minutos (2×45 minutos), o objetivo era lecionar as relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo, nomeadamente, a Fórmula Fundamental da Trigonometria e a fórmula que relaciona as três razões trigonométricas. Tendo em conta que o plano da aula anterior (realizada no dia anterior) não tinha sido cumprido, consequentemente, o plano desta aula, também não foi.

Comecei a aula, retomando o problema que tinha ficado por resolver da aula anterior. Devido à escassez de tempo, optei por fazer eu a resolução do problema no quadro. Para isso, acabei por criar uma pequena discussão, em grupo turma, que acabou por ser mais vantajosa do que estava à espera. Permitiu-me rever as definições das razões trigonométricas, bem como a necessidade de o triângulo ser retângulo. Porém, ocorreram algumas falhas da minha parte neste momento. Deveria ter recomendado aos alunos que colocassem o braço no ar e pedido a um aluno em específico que respondesse à minha questão; deveria ainda ter esclarecido o porquê da necessidade da utilização do sistema e deveria ter feito uma síntese das ideias do problema, no final da sua resolução. Após a resolução deste problema, foi iniciado o segundo momento da aula, apoiado pela Ficha de Trabalho n.º13 (Anexo 5) e por uma apresentação *PowerPoint* (Anexo 17.1).

A primeira tarefa da ficha começou logo por suscitar dúvidas nos alunos. Bem, na prática, quem levantou a dúvida foi eu. A maioria dos alunos, usou como argumento para provar que os triângulos eram retângulos, o Teorema de Pitágoras. Porém, após a minha explicação sobre a subtileza entre o Teorema e o seu recíproco, acho que a maioria dos alunos percebeu a principal diferença e considero isso, um dos aspetos bem conseguidos da aula.

Um aspeto que correu menos bem, foi a organização do quadro. À medida que os alunos foram corrigindo as diferentes alíneas, as anteriores não foram apagadas. Quando revi a gravação da aula, reparei que, num dado momento, não está percetível que resoluções eram de cada alínea. É fundamental o quadro estar sempre bem organizado para orientação dos alunos.

Após a realização da tarefa, e com o apoio do *PowerPoint*, foi realizada uma tarefa do manual, em que o objetivo era a generalização dos resultados que os alunos testaram em três triângulos específicos. Considero que a utilização deste material tecnológico foi extremamente importante para atingir os objetivos da aula. A demonstração foi feita de forma faseada e com interação entre professora-alunos, contribuindo para um melhor entendimento da maioria. Porém, durante este momento, e uma vez mais durante esta aula, deveria ter direcionado as perguntas para alguns alunos de modo a que deixassem de falar todos ao mesmo tempo.

O último momento da aula, foi aquele que considerei ser, o de maior dificuldade para os alunos. Consistia em realizar uma tarefa que envolvia a utilização das relações entre as razões trigonométricas para realizar demonstrações matemáticas. No plano tinha preconizado a resolução da primeira alínea em grupo turma. Achei que, no geral os alunos tinham compreendido, no entanto, após verificar a resolução da segunda alínea, que os alunos realizaram como trabalho de casa, apercebi-me que isso não era totalmente verdade. Assim, considero que, sendo esta uma tarefa com a qual os alunos não estão familiarizados, deveria ter resolvido também a segunda alínea em sala de aula. Na resolução dos alunos, foi percetível a cópia que realizaram das soluções do manual.

Considero que a aula atingiu os objetivos de aprendizagem. Os alunos resolveram, sem grandes dificuldades, as tarefas propostas, o que me leva a concluir que compreenderam aquilo que foi lecionado. Por fim, acho importante afirmar que a atitude dos alunos foi irrepreensível, apesar de estarem a trabalhar a pares. No final da intervenção, senti-me orgulhosa daquilo que se tinha passado, apesar de alguns momentos menos bem conseguidos.

3.7.8. Aula 8 – *14 de março*

A oitava aula da minha intervenção (Plano de aula: Anexo 18) com duração de 90 minutos (2×45 minutos), tinha como principal objetivo abordar a relação entre o $seno$ e o $cosseno$ de ângulos complementares e ainda a dedução dos valores das razões trigonométricas dos ângulos com amplitudes de referência, e assim, dar por concluída a lecionação da Unidade Didática. No entanto, como o plano da aula anterior não tinha sido concluído, comecei por mostrar aos alunos a utilidade das relações entre as razões trigonométricas para determinar valores aproximados das mesmas. Para isso, comecei por fazer uma revisão dos conteúdos lecionados na aula anterior, de forma a sistematizar os principais resultados com os alunos. Durante este momento, foi importante o reforço da simbologia matemática a utilizar nestes conteúdos, uma vez que fui observando através das resoluções dos alunos, essa dificuldade. Devido a tudo isto, acabei por demorar mais tempo do que aquilo que tinha estipulado, e como consequência disso, acabei por não conseguir concluir o plano para esta aula.

Relativamente a este momento, e durante a monitorização do trabalho dos alunos, reparei que estes não manifestaram dificuldades significativas relativamente à utilidade das relações entre as razões trigonométricas.

Iniciando o segundo momento da aula, e tendo em conta que tinha demorado mais tempo do que o estipulado na atividade anterior, optei por resolver as duas tarefas que faltavam em grupo turma, ao invés de deixar os alunos resolverem autonomamente. Para isso foi recorrendo ao questionamento oral e como tinha o apoio de uma apresentação *PowerPoint* (Anexo 18.1), não considero que isso tenha afetado a aprendizagem dos alunos, muito pelo contrário.

Da realização destas duas tarefas, ocorreram situações menos bem conseguidas. Após abordar os alunos sobre os ângulos complementares, deveria ter dado alguns exemplos sobre a vantagem da sua utilização, tornando evidente o propósito da sua utilização. Depois da construção da tabela dos valores exatos, poderia ter relacionado as amplitudes dos ângulos de $30°$ e $60°$ e na mesma ideia, o $sen\, 45°$ com o $cos\, 45°$.

Durante esta aula, tive em atenção a alguns aspetos menos conseguidos durante as últimas aulas, nomeadamente, ao direcionar as questões a determinados alunos, ao não haver alunos de costas para o quadro e na própria organização do quadro. O comportamento dos alunos foi exemplar, apesar de estarem a trabalhar em grupo.

Portanto, posso considerar que, a continuidade deste modo de trabalho, levou a que os alunos aprendessem também, a trabalharem grupo, falando em modo “segredo”, como fiz questão de referir diversas vezes.

Considero que a aula atingiu os objetivos de aprendizagem. Os alunos resolveram as tarefas propostas, e foram relativamente participativos durante as sistematizações. No final da aula, senti que provavelmente, teria sido uma aula cansativa para os alunos, devido à quantidade de conteúdos que tinham sido abordados, no entanto considero que a utilização do método de discussão, ajudou a minimizar essa situação. Senti ainda, uma espécie de dever cumprido, afinal tinha acabado de lecionar todos os tópicos da Unidade de Ensino e as próximas aulas seriam para consolidar e avaliar conteúdos.

3.7.9. Aula 9 – *18 de março*

A nona aula da minha intervenção (Plano de aula: Anexo 19) com duração de 45 minutos, tinha como principal objetivo a consolidação dos conteúdos do tópico da trigonometria através da resolução de problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando as razões trigonométricas dos ângulos com amplitudes de referência ou então utilizando ângulos agudos dados e as respetivas razões trigonométricas dadas por uma máquina de calcular ou por uma tabela. Esta aula tinha como base a realização de uma ficha de trabalho (Anexo 7) constituída apenas por problemas retirados de Provas Nacionais de 3.º Ciclo. Após refletir sobre oito aulas, posso finalmente dizer, que o plano desta aula foi cumprido.

Comecei a aula chamando à atenção para diversas considerações a ter neste tipo de tarefas. Foquei aspetos como a extensão dos enunciados e da regular duplicação de informação; da possibilidade de utilização da calculadora ou das tabelas de valores trigonométricos; e, por fim, dos principais passos a realizar na resolução de problemas, dando ênfase à resposta. Considero que este foi um aspeto bem conseguido da aula, na medida em que informei os alunos sobre questões úteis, não só para a realização daquela ficha de trabalho, mas também para os momentos de avaliação.

Durante a monitorização do trabalho autónomo, tirando algumas dúvidas, reparei que os alunos estavam a revelar mais dificuldades no problema com contexto puramente matemático, uma vez que exigia alguns conhecimentos para além da trigonometria. Dificuldades ao nível dos valores aproximados e do número de casas decimais, eram também algo bastante recorrente.

Optei por ser eu a resolver os dois problemas no quadro, com o objetivo de ir salientando os diversos aspetos inerentes a este tipo de tarefas. Para isso, utilizei o questionamento oral, direcionando as minhas perguntas a diversos alunos. Durante a resolução do problema 1, esqueci de reforçar que os triângulos eram retângulos e de explicar a razão. Sem dúvida, um dos aspetos negativos da aula.

Nesta aula, saliento a minha melhoria na organização do quadro, numerando os principais cálculos realizados. Para além disso, a preparação das perguntas a colocar aos alunos, foi algo crucial para que esta aula tivesse corrido tão bem como acabou por acontecer. Reforço ainda a atitude e comportamento dos alunos. Após este conjunto de aulas, os alunos já estavam familiarizados com a minha metodologia de sala de aula e considero que este era também um fator para uma boa dinâmica de sala de aula.

Por fim, considero que a aula atingiu os objetivos de aprendizagem propostos para os alunos. Este aspeto foi possível verificar através das resoluções que os alunos me entregaram relativamente aos problemas 3 e 4 que ficaram propostos como trabalho de casa.

3.7.10. Aula 10 – *19 de março*

Esta aula da minha intervenção (Plano de aula: Anexo 20) teve a duração de 90 (2×45) minutos, sendo que 35 minutos foram reservados para a realização de uma questão-aula. Em virtude disso, foi definido dois grandes objetivos para esta aula: esclarecimento de dúvidas e consolidação dos conteúdos através da realização de uma ficha de trabalho (Anexo 8); e a aferição de conhecimentos através da realização da questão-aula.

Antes da realização da questão-aula, estava planeado a realização de cinco dos dez problemas da ficha, e apesar de alguns alunos os terem realizado, apenas foram apresentadas as resoluções de dois, no quadro. Após ter entregado a ficha de trabalho, comecei por fazer a monitorização do trabalho dos alunos que estavam a trabalhar em pares e reparei que, sendo a primeira tarefa, diferente daquilo que os alunos estavam habituados a fazer, foi logo razão para suscitar imensas dúvidas. Assim, optei por arranjar valores diferentes e fazer exatamente aquilo que a tarefa pretendia. Ao longo do meu esclarecimento, fui alertando os alunos para algum rigor ao nível da linguagem matemática. Considero que, ao não realizar logo esta primeira tarefa, foi uma boa estratégia. Assim, os alunos tiveram a oportunidade de ver um outro exemplo e depois, poder ainda praticar se efetivamente tinham aprendido ou não. Ainda sobre esta pergunta, durante a realização do plano, não foi contemplada uma das resoluções que os alunos acabaram por fazer. Nesse sentido, optei por pedir a dois alunos, com resoluções distintas que viessem apresentar as suas estratégias no quadro. Se, ao longo da minha intervenção tivesse tido mais tempo disponível, teria realizado esta opção mais vezes. Considero que é extremamente importante demonstrar aos alunos, que na maioria das vezes não existe "o" caminho correto, mas sim uma diversidade de opções.

Relativamente à segunda pergunta, a discussão e resolução foi realizada por mim com ajuda de toda a turma. O meu principal objetivo com esta atitude, era permitir alertar os alunos para diversos aspetos que eles deveriam ter em atenção neste tipo de tarefas, que eram os problemas com contextos de realidade e semi-realidade. Aspetos como a importância da interpretação do enunciado, a apresentação de todos os cálculos e justificações, e ainda a importância da resposta de acordo com o contexto, foram alguns dos aspetos referidos.

Apesar do plano de aula não ter sido cumprido, considero que foi uma aula onde os objetivos de ensino foram atingidos e isso revelou-se através dos bons resultados obtidos na questão-aula realizada pelos alunos.

Por fim, enalteço a participação e comportamento dos alunos. Este é, realmente um dos aspetos, que mais evolução tem tido ao longo da minha intervenção. Os alunos, no geral, não são muito participativos, e isso dificultava a minha tarefa como professora. Felizmente, os alunos foram alterando a sua atitude, e as aulas tornaram-se muito mais dinâmicas.

3.7.11. Aula 11 – *21 de março*

Esta aula (Plano de aula: Anexo 21) com duração de 90 (2×45) minutos, tinha como principal objetivo a consolidação dos conteúdos do tópico da trigonometria através da correção da questão-aula realizada na aula anterior; e do esclarecimento de dúvidas dos alunos para a ficha de avaliação. Tendo em conta que era a última aula antes da ficha de avaliação, que os conteúdos que a compunham não eram apenas sobre Trigonometria, e como era habitual no Colégio, 45 minutos da aula, seriam reservados ao esclarecimento de dúvidas sobre qualquer um dos tópicos que sairiam no momento de avaliação. No plano da aula, estava contemplado que, caso não existissem dúvidas, os alunos continuariam a resolução da Ficha de Trabalho n.º15 (Anexo 8).

Tal como já referi anteriormente, o primeiro momento da aula estava reservado para a entrega e correção da questão-aula. É importante referir, que o papel deste instrumento de avaliação, neste momento, foi formativo. Ao longo da resolução de cada uma das tarefas, fui chamando à atenção dos alunos para as diversas incorreções. Tendo em conta que tinha sido eu a corrigir a questão-aula, tinha bem presente na memória quem e o que tinha sido mal realizado. Nesse sentido, acabei por ir direcionando as minhas perguntas para os alunos que revelaram mais dificuldades na sua concretização. Com algum receio de os colocar numa posição desconfortável, fui tecendo alguns comentários, que os ia fazendo rir com as diversas situações. Considero que acabou por ser um momento de grande aprendizagem para alunos, no sentido em que, alguns dos erros alertados, não voltaram a ser cometidos na ficha de avaliação. Após terminar a correção da questão-aula, foi indicado aos alunos que continuassem a resolução da ficha de trabalho da aula anterior.

Durante a monitorização do trabalho autónomo, reparei que os alunos estavam a ter dificuldades nas perguntas que envolviam justificação e demonstração de resultados. Tentado minimizar essas dificuldades, fui recorrendo às perguntas que tinham sido previamente pensadas, no plano de aula, para colmatar essas situações. Durante este momento, uma das dificuldades que senti, foi na gestão dos diferentes ritmos de trabalho que estavam a surgir na turma. Tinha alunos a que evidenciavam algumas dificuldades, mas depois tinha outros que já estavam a finalizar a ficha de trabalho. Tendo isso em atenção, decidi terminar com as idas ao quadro dos alunos e iniciar, em jeito de discussão em grupo turma, a resolução das questões, que mais aspetos tinham a salientar.

Relativamente ao problema quatro, que exigia a utilização de um sistema de equações, considero que a minha abordagem de dividir a figura em duas, foi um aspeto positivo e contribuiu para uma maior aprendizagem dos alunos, pelo menos ao nível da formulação do problema. Na ficha de avaliação sumativa, num problema idêntico, a maioria dos alunos conseguiu formalizar o problema, mas não o conseguiu resolver.

Considero que, relativamente a isso, só a prática dos alunos levaria a um melhor desempenho, nesse sentido.

Posteriormente, e como não tinha havido nenhum aluno a colocar dúvidas sobre Inequações e Probabilidades, os outros dois tópicos que sairiam no teste, optei por fazer uma pequena síntese sobre cada um dos conteúdos. Algo que, acho ter sido um aspeto positivo nesta aula. Para finalizar a aula, acabei resolvendo a questão oito, por ser uma questão que, na maioria das vezes, os alunos revelam maiores dificuldades.

Por fim, considero que a aula atingiu os objetivos de aprendizagem propostos para os alunos, apesar do plano de aula não ter sido cumprido. Após ver o registo vídeo desta aula, apercebi-me do comentário de um dos grupos, em que as alunas nesta aula, decidiram ficar a trabalhar sozinhas. Para estas alunas, o trabalho individual é considerado mais proveitoso do que em grupo. No entanto, acho que no geral, o trabalho em grupo foi vantajoso para a maioria dos alunos da turma.

Após terminar a aula, o sentimento de dever cumprido permaneceu durante alguns momentos. Tinha terminado a minha intervenção e sentia que os alunos tinham atingido os objetivos de aprendizagem.

3.7.12. Aula 12 – *25 de março*

Nesta aula, com duração de 90 minutos, foi realizada a Ficha de Avaliação (Anexo 9), onde foram avaliados os conteúdos de Trigonometria, bem como os conteúdos sobre Inequações e Probabilidade.

3.7.13. Aula 13 – *23 de abril*

A última das minhas aulas (Plano de aula: Anexo 22) com duração de 45 minutos, teve como principal objetivo dar resposta às perguntas colocadas no início da Unidade Didática. No primeiro dia da minha intervenção, os alunos foram abordados sobre a utilidade da trigonometria na vida real e surgiu a ideia de criar uma atividade em que os alunos pudessem colocar "as mãos na massa". Com o auxílio de um quadrante, os alunos determinaram a altura de alguns dos edifícios do Colégio. Como era uma atividade interessante e estávamos próximos de uma iniciativa coletiva do Colégio – o *Open Day* – foi proposto que os alunos preparassem uma cartolina, onde descreveriam tudo o que tiveram de fazer para conseguir determinar a altura do monumento/edifício que escolheram. De forma a ilustrar os trabalhos, durante a atividade fomos tirando algumas fotografias aos alunos, que foram posteriormente disponibilizadas.

Um dos primeiros aspetos a apontar sobre esta aula, é o momento em que a mesma é realizada. Como é possível observar, a última aula sobre Trigonometria que tinha ocorrido há cerca de um mês e, para além disso, esta era a última semana de aulas do 2.º Período. No entanto, foi muito importante e gratificante perceber que, apesar de ter passado todo esse tempo, os alunos ainda demonstraram possuir conhecimento deste tema.

Os alunos realizaram este trabalho em grupo, e foram os responsáveis pela sua composição. Este foi o primeiro momento da aula. No segundo momento da aula, os alunos foram para o terreno realizar todas as medições que achavam necessárias, sempre acompanhados por uma professora de matemática, que os incentivava a explicar os seus raciocínios. Por fim, os alunos voltavam à sala e começavam a realizar os cálculos com o auxílio da calculadora, bem como um pequeno texto onde explicavam aquilo que tinham feito. Nestes três momentos, foi importante para mim, verificar que os alunos, após concluírem os cálculos, estavam a refletir sobre eles.

Considero que esta atividade foi de extrema relevância para a aprendizagem dos alunos. Não só por perceberem a utilidade da trigonometria, mas também por ter sido realizada tendo um contexto de realidade dos alunos, em particular, envolvendo os edifícios e monumentos do próprio Colégio, que representam um património de extrema relevância e valor histórico.

Para além disso, esta foi uma atividade realizada através da interdisciplinaridade entre Matemática, Português e a disciplina de Educação Visual. Foi pedido à professora de Português que verificasse os textos realizados pelos alunos e à professora de Educação Visual que nos apoiasse na construção dos quadrantes.

Após toda esta atividade, surgiram em exposição trabalhos bastante interessantes e criativos, elogiados pelos diversos professores de Matemática do Colégio.

CAPÍTULO 4

MÉTODOS E PROCEDIMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Neste capítulo apresentam-se os métodos e procedimentos de recolha de dados. Começa-se por explicitar as principais opções metodológicas para o desenvolvimento do estudo, com base na literatura de referência. Posteriormente, são indicados os métodos de recolha e análise de dados, com a respetiva justificação, e de seguida, caracterizam-se os participantes do estudo. Por fim, são feitas algumas considerações de natureza ética consideradas relevantes para este estudo.

4.1. Opções metodológicas

O objetivo deste trabalho passa por compreender como é que os alunos resolvem problemas. Assim, pretendendo observar e analisar os processos de resolução dos alunos, seguiu-se uma metodologia de natureza interpretativa e abordagem qualitativa. Este estudo será ainda desenvolvido numa lógica de descoberta, procurando responder às questões de investigação.

A escolha da abordagem surge, essencialmente, pelo facto de o objetivo do meu estudo demonstrar uma preocupação pelos alunos, procurando entender as suas ações e comportamentos (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Também, segundo Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1994), uma investigação de natureza interpretativa permite a recolha de informação sobre o processo de ensino-aprendizagem dos participantes, uma vez que dá especial valorização aos comportamentos e atitudes observados. Com este estudo, não pretendia generalizar conclusões, mas sim refletir e interpretar a informação recolhida em pequena escala.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa apresenta cinco características principais que, globalmente, foram atendidas neste estudo. Em primeiro lugar, a recolha dos dados foi feita a partir do ambiente natural e através do investigador. De facto, o estudo foi realizado na sala de aula e apesar de ter sido usado registo vídeo e áudio, os dados foram complementados por mim, enquanto investigadora. Em segundo lugar, o tipo de dados recolhidos foram de natureza descritiva, e permitiram-me compreender e refletir sobre a situação em estudo. Em terceiro lugar, na investigação qualitativa, o investigador interessa-se mais pelos processos do que pelos resultados obtidos. Durante o estudo, procurei entender que estratégias utilizavam os alunos e que dificuldades e conhecimentos evidenciavam. Em quarto lugar, numa investigação de natureza qualitativa, os dados são analisados de forma indutiva, isto significa que não é intenção provar pressupostos e que "o significado é de importância vital" (p.50). Por fim, reconhece-se a importância da perspetiva dos participantes que foi parcialmente atendida, dado que foram analisadas não só as resoluções escritas dos alunos, mas também os diálogos que ocorreram em sala de aula e permitiram de alguma forma perceber o seu pensamento em torno da resolução de problemas.

4.2. Participantes do estudo

Uma vez que no estudo pretendia-se analisar de forma criteriosa, as estratégias utilizadas pelos alunos, bem como as suas dificuldades e conhecimentos evidenciados, tornar-se-ia demasiado complexo recorrer à totalidade dos alunos da turma. Nesse sentido, foram selecionados dois alunos, de forma criteriosa: Hélvio e Joaquim.

Para esta escolha, foi atendido à participação regular demonstrada desde o início do ano letivo pelos dois alunos; a boa capacidade de comunicação; a interação revelada entre o par durante o trabalho; o empenho no trabalho realizado em sala de aula, e por fim, relativamente ao aproveitamento na disciplina de matemática, por representarem a maioria dos alunos, no que concerne às classificações obtidas desta turma.

Os dois alunos, estiveram ao longo do ano, dispostos um em frente do outro, em mesas consecutivas e, mesmo quando o trabalho era para ser realizado individualmente, partilhavam e discutiam resultados.

Hélvio

O Hélvio é um aluno com resultados medianos que se distrai facilmente, não aproveitando as suas capacidades para obter um melhor rendimento, na disciplina de Matemática. Ao longo das aulas realizou as atividades propostas, no entanto, era frequentemente chamado à atenção por parecer estar desfocado da aula.

Relativamente ao seu aproveitamento, no 1.º Período o aluno obteve a classificação de 125 pontos, tendo aumentado 5 pontos no 2.º Período. No último período, o aluno voltou a ter a classificação de 125 pontos. Na Prova Nacional do 9.º ano, obteve a classificação de 78%.

Joaquim

O Joaquim é um aluno com resultados médio-altos. Demonstrou ser calmo, bastante empenhado e trabalhador. Ao longo das aulas realizou sempre as atividades propostas, no entanto, é um aluno que demonstrava alguma insegurança. Nesse sentido, procurava a professora para validar e/ou confirmar o seu raciocínio ou a sua resolução. Na maioria das vezes, estas estavam corretas. Quando lhe era confirmado que a sua resolução estava correta, demonstrava interesse em participar e de apresentar a tarefa, no quadro.

Relativamente ao seu aproveitamento, no 1.º Período o aluno obteve a classificação de 130 pontos, tendo mantido esse valor no 2.º Período. No último período, o aluno aumentou a sua classificação para 140 pontos. Na Prova Nacional do 9.º ano, também obteve a classificação de 78%.

4.3. Métodos de recolha de dados

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a escolha dos métodos e instrumentos de recolha de dados, depende do objetivo e do contexto onde o estudo será realizado, bem como dos interesses do investigador. Tendo isso em conta, os instrumentos de recolha de dados foram a observação direta das aulas, com registo vídeo e áudio, e a recolha documental das resoluções dos alunos.

4.3.1. Observação participante

Durante este estudo assumi uma postura de observadora participante, uma das "estratégias mais representativas da investigação qualitativa" (Bogdan & Biklen, 1994, p.16), na medida em que assumi um duplo papel de professora e investigadora. Como consequência desse duplo papel e na perspetiva de captar a maioria das interações, complementei a minha observação direta com o registo áudio e vídeo.

A gravação em vídeo foi realizada de forma a captar todos os momentos de sala de aula permitindo-me assim, refletir sobre a minha intervenção e a atitude dos alunos. Foi um instrumento crucial para a realização das reflexões das aulas lecionadas, bem como para a observação das situações que passavam despercebidas durante as mesmas.

Relativamente ao registo áudio, este foi utilizado com os participantes do estudo, na medida em que me permitiu analisar de forma minuciosa o diálogo dos alunos na resolução das tarefas, nomeadamente na resolução dos problemas. Isto permitiu-me um melhor entendimento e a perceção de estratégicas dos alunos que, de outra forma, seria impossível.

De forma a complementar a observação, realizei ao longo da intervenção, notas de campo, tentando sempre que possível, realizá-las logo após cada uma das intervenções (Bogdan & Biklen, 1994). Estas notas foram do tipo descritivas e reflexivas e ilustraram aquela que foi a minha opinião sobre cada intervenção, nomeadamente sobre aspetos relativos às opções didáticas, bem como a episódios ocorridos na aula. Tinham como grande objetivo, o aperfeiçoamento constante, aula após aula. Em algumas das aulas, as minhas notas foram complementadas com observações realizadas pela minha colega de estágio e das minhas orientadoras.

4.3.2. Recolha documental

Na perspetiva de Cohen, Manion e Morrison (2007), a recolha documental assume um papel crucial num estudo, uma vez que a observação apresenta limitações ao nível do registo de dados e da sua interpretação. Nesse sentido, a recolha das produções dos alunos, permitiu-me reduzir essas limitações, sendo assim possível, uma análise minuciosa das estratégias utilizadas pelos alunos, algo que seria difícil apenas com a observação e o registo áudio.

Foram recolhidas as resoluções das tarefas realizadas em sala de aula, bem como as produções dos alunos na ficha de avaliação sumativa e na questão-aula. Segundo Creswell (2012) os documentos constituem uma fonte de dados fidedigna que tem a possibilidade de "estar na linguagem e nas palavras dos participantes" (p. 223), permitindo assim obter "uma visão mais completa da realidade" (Creswell, 2012, p.25).

Para salvaguardar que as resoluções seriam o mais fidedignas possível, foi proposto aos alunos que resolvessem as tarefas em folhas à parte e que, durante a resolução no quadro, não fizessem qualquer alteração na sua primeira resolução.

4.4. Processo de análise de dados

Do ponto de vista de Bogdan e Biklen (1994), é através da análise de dados que ocorre uma organização dos dados recolhidos, com vista à obtenção de respostas às questões inicialmente formuladas. Para Aires (2011) a "análise da informação constitui um aspecto-chave e também problemático do processo de investigação" (p.43). Segundo a autora, devido à diversidade e quantidade dos materiais recolhidos, o processo analítico é envolto de uma grande complexidade.

Para a realização desta análise, selecionei os problemas com contexto de semi-realidade resolvidos em sala de aula, permitindo-me não só o acesso às resoluções dos alunos, mas também às gravações áudio dos momentos de trabalho autónomo a pares. Note-se que nem todos os problemas abordados em sala de aula, foram objeto de análise. Nos dois problemas propostos à turma que exigiam a utilização de um sistema de equações com vista à sua resolução, foi necessária a intervenção da professora, uma vez que os alunos não foram capazes de a realizar. Tendo isso em atenção, e uma vez que o processo de resolução foi fortemente influenciado pela professora, esses problemas não foram utilizados na análise.

Ao longo desta análise, fui tentado identificar as estratégias utilizadas pelos alunos, bem como os conhecimentos e dificuldades reveladas. Relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos, estas foram estudadas tendo em consideração as fases de resolução descritas por Pólya (1945). Em cada uma destas fases, foram analisados os procedimentos dos alunos, bem como as heurísticas utilizadas, tendo em conta o mapa concetual referido no Capítulo 2, baseado nos trabalhos de Pólya (1945), Schoenfeld (1985) e Fan e Zhu (2007). Durante esta análise, foram utilizadas algumas reformulações destas heurísticas. No caso de a estratégia *simplificar o problema,* foi criada uma adaptação para *focar-se unicamente na figura*. Isto deveu-se ao facto de considerar que tinha ocorrido uma simplificação do problema, mas não com os pressupostos que os autores referem. Nesses casos, os alunos cingem-se à utilização da figura presente no enunciado do problema, no entanto, disso não decorre uma alteração da situação, uma vez que os dados presentes no texto são os que constituem a figura. A simplificação que aqui se refere, apenas poderá refletir-se no facto dos alunos darem ou não, resposta ao problema de acordo com o seu contexto. Relativamente à estratégia *Pensar num problema relacionado,* esta foi utilizada tendo em conta dois pontos de vista. O primeiro, em que os alunos consideram um problema semelhante resolvido anteriormente e aplicam a um novo, apenas modificando valores. E o segundo, em que os alunos recorrem aos métodos e/ou procedimento utilizados com o objetivo de encontrar a resposta correta ao problema.

No que respeita aos conhecimentos evidenciados pelos alunos, foi realizada uma análise dos problemas de acordo com os tópicos do Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013). Foram ainda analisadas as dificuldades, nomeadamente ao nível dos conteúdos e da linguagem matemática.

Por fim, e para uma melhor compreensão do leitor, é feita uma síntese após cada problema. Nessa síntese são evidenciadas as estratégias utilizadas pelos alunos, bem como os conhecimentos mobilizados na resolução do problema.

4.5. Questões de natureza ética

De acordo com Bogdan e Biklen "O primeiro problema com que o investigador se depara no trabalho de campo é autorização para conduzir o estudo que planeou" (1994, p 115). No início do presente ano letivo, foi realizado um pedido de autorização aos encarregados de educação (Anexo 23), com o intuito de dar conhecimento e pedir consentimento aos mesmos sobre o estudo a ser realizado na turma. No mesmo, foi indicado que iria proceder à gravação áudio e vídeo das mesmas e foi deixado claro que apesar desse consentimento ser dado inicialmente, quer o aluno, quer o encarregado de educação poderiam, a qualquer momento, desistir. Assim sendo, segundo a Carta Ética do Instituto de Educação (2016), foi assegurado o consentimento informado.

Durante o estudo, foi respeitada a confidencialidade e privacidade dos dados e dos alunos, protegendo a informação e mantendo o anonimato destes, prevenindo as diversas situações que pudessem prejudicar a sua integridade (IEUL,2016). Nesse sentido, os nomes utilizados durante todo o trabalho, não correspondem à realidade, tendo sido atribuídos nomes fictícios.

Foram ainda assegurados, durante o estudo, o rigor e a transparência, comprometendo-me, enquanto investigadora, não falsificar, plagiar ou distorcer os dados e resultados, utilizando-os sem modificações. Assim sendo, cumprirei os princípios da Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DE DADOS

Ao longo deste capítulo, apresentam-se e analisam-se os dados recolhidos ao longo da intervenção letiva. Esta análise está organizada tendo em conta os problemas com contexto de semi-realidade, trabalhados em sala de aula, focada nas fases de resolução de problemas, bem como nas estratégias e representações adotadas por um par de alunos: o Joaquim e o Hélvio. Na análise destes problemas atende-se ainda os conhecimentos mobilizados e dificuldades evidenciadas pelos dois alunos. Após o estudo de cada problema, é feito um quadro síntese, onde se apresentam as estratégias e os conhecimentos mobilizados pelos alunos. Estes últimos têm como referência os descritores das Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (MEC, 2013).

Para além disso, analisa-se a prestação dos alunos na resolução de problemas nos momentos de avaliação sumativa, nomeadamente na questão-aula e na ficha de avaliação sumativa. A análise dos problemas resolvidos nestes momentos de avaliação, não será tão pormenorizada como para os que foram resolvidos em sala de aula, uma vez que, para os primeiros, apenas tive acesso à resolução final dos alunos, o que torna difícil perceber como se caracteriza a resolução do problema em cada fase ou as estratégias utilizadas.

5.1. Problema 14.2 da Tarefa do Manual

O enunciado apresentado na Figura 21 diz respeito à tarefa "Determinar distâncias a locais inacessíveis" do manual dos alunos (Anexo 6). Foi, ao longo desta tarefa, que os alunos tiveram o primeiro contato com a resolução de problemas no tópico da trigonometria, em particular, com problemas com contexto de semi-realidade.

14.2 Quando o avião que vês na figura levanta voo, faz um ângulo de 20º com a linha do solo. Em 5 segundos percorre 400 metros .

a) Que altura atinge ao fim deste tempo? Apresenta o resultado arredondado às décimas.

b) Qual é o valor, arredondado às décimas, da distância d ?

Figura 21 - Enunciado do problema 14.2 do manual adotado.

5.1.1. Alínea a.

Compreensão do problema

A dificuldade de compreensão deste problema era que os alunos concluíssem que a incógnita a indicada na figura da esquerda representava a altura atingida pelo avião. Como é possível observar na figura anterior (Figura 21), no enunciado do problema, não é dito de forma clara, que a altura atingida pelo avião representa a incógnita a no triângulo. Nesse sentido, a leitura do enunciado do problema não foi realizada em grupo turma e foi indicado que cada grupo procedesse à leitura e discussão do mesmo autonomamente.

Os alunos realizaram a leitura do enunciado do problema em silêncio e nenhum deles fez referência ao contexto do problema. Ainda nesta fase, verificou-se que os alunos optaram pela *utilização de um esboço para a representação dos dados do problema*, desenhando uma figura onde *assinalam os dados importantes do problema*, ou seja, o amplitude do ângulo e a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo, e aquilo que se pretendia determinar (Figura 22).

O Joaquim interpretou corretamente o enunciado do problema, tendo comentado o seguinte para o colega: “Este exercício é fácil. Posso? Vê se acerto: tu tens um triângulo e é retângulo e tu queres saber a altura, então tu queres saber o a”. À medida que o Joaquim foi fazendo as afirmações, o seu Hélvio ia confirmando a sua veracidade, de forma a aprovar o pensamento do colega.

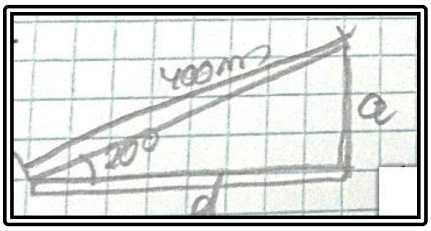


Figura 22 - Representação da alínea a. do problema 14.2, pelo Hélvio.

Elaboração de um plano

Após a interpretação do problema, os alunos entenderam que tinham de decidir que razão trigonométrica poderiam utilizar. Há uma diferença de opinião por parte dos dois alunos. Vejamos o diálogo entre eles:

Hélvio: Tu tens a hipotenusa.

Joaquim: E tu queres saber o cateto adjacente. Então (escrevendo no caderno *SOH-CAH-TOA)*, adjacente e hipotenusa, vamos usar o…

Hélvio: Não, pensa assim: Tu tens a hipotenusa, o que podes calcular com a hipotenusa? O seno...

Joaquim: E o cosseno. Eles querem calcular a altura.

Hélvio: A altura é o oposto.

Joaquim: É o cateto oposto. É o cos (referindo-se ao cosseno). Não, é o seno!

Hélvio: Então usas o seno. Muito bem!

Com este diálogo verifica-se que, numa primeira instância, o Joaquim estava a identificar erroneamente a razão trigonométrica a utilizar, bem como a classificação do cateto em questão. Porém, com a ajuda do Hélvio, foi capaz de corrigir a sua ideia e estabelecer corretamente o plano a seguir. Tal como já foi referido, o modo de identificação da razão foi diferente em cada um dos alunos. Repara-se que o Joaquim se apoiou numa mnemónica, *SOH-CAH-TOA*, onde SOH, CAH e TOA significam Seno – Oposto – Hipotenusa, Cosseno – Adjacente – Hipotenusa e Tangente – Oposto – Adjacente, respetivamente. Posteriormente, este aluno, estabelecendo uma relação com os dados do problema e o que se pretendia determinar, dá a resposta. O Hélvio por sua vez, começou por reparar que a medida do comprimento fornecida corresponde à medida de comprimento da hipotenusa, e por isso exclui logo a razão trigonométrica tangente. De seguida, verificou que a altura corresponde ao cateto oposto relativamente ao ângulo de amplitude 20° e por fim dá a resposta.

Execução do plano

Após estar definido que razão trigonométrica iria ser usada, os alunos resolveram esta etapa sem grandes dificuldades. Na figura seguinte (Figura 23) apresenta-se a resolução do Hélvio. Ao longo da resolução, os alunos estabeleceram um diálogo, onde é possível verificar o seu raciocínio, bem como os conhecimentos que mobilizaram.

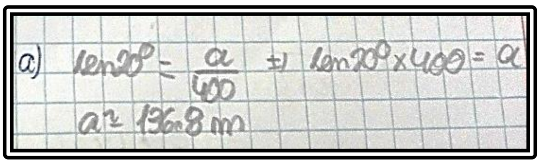


Figura 23 - Resolução da alínea a. do problema 14.2, pelo Hélvio.

Joaquim: Seno é oposto sobre hipotenusa. Então seno de 20 graus é igual a…

Hélvio: 400...

Joaquim: Não. A a sobre 400.

Hélvio: 400 passa a vezes (referindo-se à mudança de membro na resolução da equação de 1.º grau).

Joaquim: Agora fica seno de 20 graus vezes 400 igual a a.

Hélvio: Agora vou à calculadora. Como é que isto se calculava? Ah já me lembro. Carrego no seno (referindo-se à tecla SIN da calculadora), 20, depois fecha aspas (parêntesis) e igual. Agora ANS (referindo-se à tecla ANS da calculadora) vezes 400 e dá 136.

Joaquim: Calma é às décimas.

Hélvio: Então é 136,8.

Joaquim: Graus ou centímetros?

Hélvio: Metros.

É possível reparar através do diálogo e da resolução que os alunos *utilizam uma equação* para traduzir o problema e determinar o valor da altura. A equação é resolvida corretamente, no entanto, durante o diálogo, é notória alguma imprecisão na linguagem matemática dos alunos, nomeadamente quando se referem à mudança de membro do valor numérico 400.

Para determinar o valor da razão trigonométrica, optaram por utilizar a calculadora científica. É visível que os alunos estão familiarizados com as suas potencialidades, na medida em que ao utilizarem a tecla ANS, a calculadora recupera o último cálculo efetuado. Também é possível verificar que os alunos tiveram a preocupação de utilizar os parêntesis, ainda que neste caso não fosse necessário.

Por fim, os alunos procederam ao arredondamento de forma correta e tiveram atenção às unidades de medida utilizadas. No diálogo, depreende-se que o Joaquim identificou que, neste tipo de problemas, as unidades de medida são de comprimento ou de amplitude.

Verificação dos resultados

Na Figura 23, e apesar dos alunos terem chegado ao resultado correto, com o arredondamento e as unidades de medida pretendidas, verifica-se que estes não apresentaram a resposta de acordo com o contexto do problema. Os alunos deveriam ter tido em atenção, na sua resposta, que a pergunta desta alínea solicitava a altura que o avião atinge ao final de um certo período de tempo.

O diálogo relativamente a esta alínea termina com os alunos a identificar a unidade de medida de comprimento, como é possível identificar na fase anterior. Assim, verifica-se que não existe uma reflexão sobre o resultado obtido, nomeadamente se este está ou não de acordo com os dados do problema.

5.1.2. Alínea b.

Compreensão do problema

O enunciado parece ser claro para os alunos, uma vez que não tiveram qualquer dúvida na sua interpretação e, apesar de ser uma segunda alínea do problema, não relacionaram com aquilo que tinham feito anteriormente. O Joaquim leu o enunciado e o Hélvio indicou de forma imediata o plano que iriam seguir.

Elaboração de um plano

Na planificação desta aula, não foi previsto que surgissem problemas, nem diferentes resoluções nesta alínea, porém e tendo em conta que os alunos iam resolvendo alínea a alínea, sem reparar o que era pedido posteriormente, este par de alunos levantou uma discussão sobre que procedimento iriam utilizar: razões trigonométricas ou Teorema de Pitágoras. Aproveita-se para esclarecer que, os autores do manual pressuponham que os alunos utilizassem as razões trigonométricas para determinar a distância d, uma vez que no problema seguinte (14.3) afirmavam "*Depois de teres determinado a altura* a, *recorrendo à trigonometria, também podes determinar* d *pelo teorema de Pitágoras. Experimenta*". Vejamos o seu diálogo:

> **Joaquim:** Qual é o valor, arredondado às décimas, da distância d? (o aluno lê o enunciado da alínea b.).
>
> **Hélvio:** Agora temos de determinar d pelo Teorema de Pitágoras.
>
> **Joaquim:** Como é que calculas [aplicas] o Teorema de Pitágoras se só tens uma medida?
>
> **Hélvio:** Usamos o a.

Através do diálogo é possível perceber que os alunos compreenderam aquilo que era pedido, tal como já tinha sido referido na fase anterior. No entanto, após a sugestão do Hélvio de aplicar o Teorema de Pitágoras, o Joaquim demonstrou algumas dúvidas. Este aluno considerou que, sendo as alíneas independentes, o valor de a, voltaria a ser uma incógnita, o que impossibilitaria a aplicação do Teorema de Pitágoras, tal como refere. Porém, a sugestão do Hélvio passou por *introduzir elementos auxiliares*, nomeadamente, a introdução da medida de comprimento a, calculada na alínea anterior e, por conseguinte, aplicar o Teorema de Pitágoras.

Execução do plano

Após concordarem na aplicação do Teorema de Pitágoras, os alunos não tiveram dúvidas na sua concretização. Porém, tiveram uma discordância relativamente ao número de casas decimais a utilizar nos cálculos intermédios e sentiram necessidade de chamar pela professora.

> **Hélvio:** Então c ao quadrado (os alunos utilizaram outra letra para denominar a distância d) é igual a, vamos ter de fazer as contas. 400 ao quadrado é igual a 160000 e 136,8 ao quadrado é igual a 18714,24.
>
> **Joaquim:** É igual a 18714,2 porque pede a aproximação às décimas.
>
> **Hélvio:** Vamos chamar a professora. Professora! Aqui (apontando para a alínea b.) nós usamos o valor arredondado [da medida do a]. Aqui também temos de arredondar às décimas?
>
> **Professora:** Vocês já sabem que se não disse nada, nos cálculos intermédios, têm de deixar mais casas decimais do que aquelas que pedem na resposta.
>
> **Joaquim:** Então é ponto 24 [referindo-se a 18714,24].

Na Figura 24 apresenta-se a resolução realizada pelos alunos, retirada do caderno diário do Hélvio.

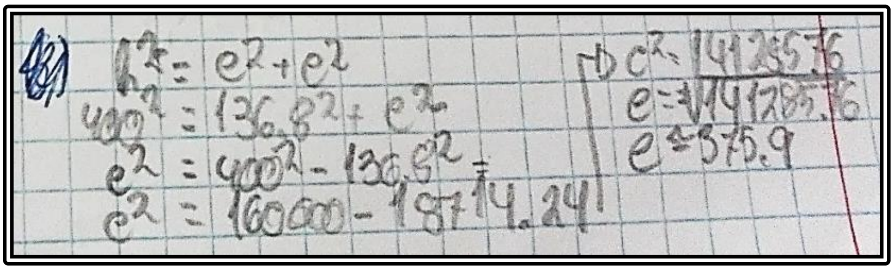


Figura 24 - Resolução da alínea b. do problema 14.2, pelo Hélvio.

Verificação dos resultados:

À semelhança da alínea anterior, os alunos não deram resposta ao problema, apesar de, isso ter sido chamado à atenção no quadro posteriormente, aquando da apresentação da resolução deste problema.

Após terminarem a resolução da alínea anterior e ao iniciarem a leitura da questão 14.3, os alunos aperceberam-se que já tinham realizado aquilo que era pedido, nomeadamente a aplicação do Teorema de Pitágoras. No diálogo seguinte é possível observar que, após uma breve discussão com a professora, perceberam que também poderiam ter usado as razões trigonométricas para determinar o valor de d, *recordando o problema resolvido anteriormente*.

Hélvio: Professora, nós já fizemos isto!

Professora: Então podem avançar.

Joaquim: Não professora, nós fizemos a pergunta 14.3 na alínea b.

Professora: Então o que será que isso quer dizer?

Joaquim: Que não era para usar o teorema [de Pitágoras] nesta alínea (referindo-se à alínea b.).

Professora: Então e agora?

Hélvio: Temos que usar outra coisa.

Joaquim: Ah já sei! Fazemos como na alínea a. mas agora com o cosseno (referindo-se à trigonometria).

Síntese

Começa-se por salientar que o trabalho a pares foi bastante profícuo para os alunos. Ao longo dos diálogos foi possível verificar que, as discussões realizadas e as trocas de perspetivas entre os alunos foram fundamentais para as suas resoluções, sendo que uma das principais vantagens foi o aumento da sua autonomia em relação à professora, relativamente a outras aulas em que trabalhavam individualmente.

Ao longo da resolução deste problema, observa-se que os alunos utilizaram diversas estratégicas de resolução. Na fase da ***Compreensão do problema***, predominam a *utilização de um esboço para a representação dos dados* e o *assinalar dos dados importantes do problema.* Antes de responder a qualquer uma das alíneas, os alunos começaram sempre por desenhar uma figura com os dados do problema e aquilo que se pretende determinar.

Nas restantes fases, foram utilizadas mais três estratégias distintas. Nas duas alíneas os alunos optaram pela *utilização de uma equação* para determinar a medida de comprimento pedida. Na resolução da alínea b., foi possível verificar que os alunos *introduziram elementos auxiliares*, nomeadamente, a introdução da medida de comprimento a, para ser possível dar resposta à questão através do Teorema de Pitágoras, uma vez que não recorreram às razões trigonométricas. Quando foi sugerido utilizar outra resolução, os alunos *recordaram um problema resolvido anteriormente*, nomeadamente o da alínea a., recorrendo assim às razões trigonométricas.

Relativamente às dificuldades evidenciadas, a sua maioria foi colmatada pelo modo de trabalho dos alunos. No entanto, ao longo dos diálogos foi possível notar que os alunos ainda tiveram uma ligeira dificuldade em compreender que razão trigonométrica utilizar, bem como na forma como proceder nas aproximações. Apesar de não serem consideradas dificuldades, existem falhas na aplicação do Teorema de Pitágoras e na resolução de equações de 2.º grau. Os alunos utilizaram a mesma incógnita para representar diferentes catetos no triângulo retângulo e raramente apresentaram as duas soluções da equação de 2.º grau bem como a justificação da solução negativa não ser válida. A utilização indevida ou a não utilização do sinal de equivalência ($\Leftrightarrow$) também foi outra das falhas observadas.

No que respeita aos conhecimentos mobilizados, verificou-se que os alunos utilizaram não só, conteúdos abordados durante este ano letivo, como também conceitos adquiridos anteriormente. De seguida, faz-se um esquema (Quadro 8) onde se resume as estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos no problema 14.2 do manual adotado (Figura 21).

Quadro 8 - Síntese das estratégias e tópicos de aprendizagem mobilizados pelos alunos na resolução do problema 14.2.

Questão:	Estratégias:	Tópicos de aprendizagem:
14.2.a)	• Utilizar de um esboço para representação do problema. • Assinalar dos dados importantes do problema. • Utilizar uma equação.	• Definir as razões trigonométricas. • Resolver equações do 1.º grau. • Utilizar a calculadora para determinar os valores das razões trigonométricas. • Resolver problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas.
14.2.b) (Primeira resolução)	• Utilizar um esboço para representação do problema. • Introduzir elementos auxiliares. • Utilizar uma equação.	• Aplicar o Teorema de Pitágoras. • Resolver equações do 2.º grau. • Arredondar números decimais.
14.2.b) (Segunda resolução)	• Utilizar de um esboço para representação do problema. • Pensar num problema relacionado. • Utilizar uma equação.	• Definir as razões trigonométricas. • Resolver equações do 1.º grau. • Utilizar a calculadora para determinar os valores das razões trigonométricas. • Resolver problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas.

Para finalizar, este problema foi classificado, relativamente ao seu contexto, como sendo de semi-realidade. Existe referência a um avião quer no enunciado, quer na imagem da direita (Figura 21) mas que não tem qualquer utilidade para a resolução do problema. Durante o trabalho autónomo dos alunos, não houve em qualquer momento, referência ao contexto da tarefa. Uma justificação para isso poderá ter sido o facto de a imagem da esquerda possuir, logo à partida, um triângulo retângulo bem identificado. Observou-se ainda, que os alunos não apresentaram uma resposta ao problema.

5.2. Problema 14.4 da Tarefa do Manual

O enunciado apresentado na Figura 25 diz respeito à tarefa "Determinar distâncias a locais inacessíveis" do manual dos alunos (Anexo 6). À semelhança do problema anterior, o problema tem um contexto de semi-realidade. Trata-se da referência a um monumento, situado em Lisboa, conhecido pelos alunos. O enunciado possui duas imagens, sendo que a da esquerda não tem qualquer informação que seja relevante para a resolução do problema. Na figura da direita, são apresentados dois triângulos retângulos bem vincados.


14.4 Qual é a altura do Padrão dos Descobrimentos?
A figura representa o Padrão dos Descobrimentos, em Lisboa.

Foi necessário medir a sua altura. Para isso, utilizou-se um teodolito.
Registaram-se as medidas seguintes, de acordo com o esquema da figura:

$\alpha = 39°$; $\beta = 9°$ e $\overline{PT} = 60$ m

Determina a altura do Padrão, com aproximação às centésimas.

Adaptado de Exame Nacional

Figura 25 - Enunciado do problema 14.4 do manual adotado.

Compreensão do problema

O principal desafio deste problema era que os alunos compreendessem que a altura do Padrão dos Descobrimentos era obtida através de uma soma de duas medidas de comprimento. Os alunos leram o enunciado do problema em silêncio e não fizeram nenhuma referência ao seu contexto, tendo apenas um dos alunos mencionado que era necessário determinar a altura, mas sem referência ao monumento. Vejamos o seguinte diálogo:

Hélvio: Vá desenha a figura para ser mais fácil de perceber.
Joaquim: Então, é suposto calcular a altura.
Hélvio: Mas atenção, a altura é isto tudo aqui (apontado para as duas medidas de comprimento que constituem a altura do monumento).

Na figura seguinte (Figura 26), bem como no diálogo, é possível verificar que os alunos optaram pela *utilização de um esboço para a representação dos dados do* *problema,* desenhando uma figura representativa do problema. Para além disso, *assinalaram os dados importantes do problema* no caderno diário.

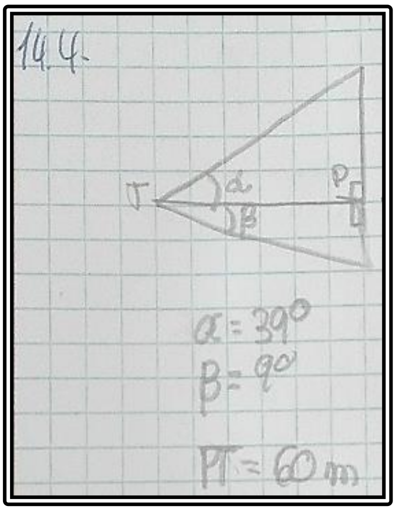


Figura 26 - Representação do problema 14.4, pelo Hélvio.

Elaboração de um plano

Após a interpretação do enunciado do problema, os alunos discutiram como iriam proceder para determinar a altura pretendida. No diálogo seguinte é possível reparar que o Joaquim tentou aplicar a trigonometria na presença de um triângulo não retângulo, porém o Hélvio teve a capacidade de corrigir o colega e, de seguida, encontrar um processo correto de resolução.

Joaquim: Querem determinar a altura, então faz-se a tangente.

Hélvio: Como é que fazes a tangente?

Joaquim: Então 39 mais 9, depois queres o oposto e tens o adjacente.

Hélvio: Espera um momento! O triângulo tem de ser retângulo, este aqui não é retângulo. Para fazeres [aplicares] as razões trigonométricas, o triângulo tem de ser retângulo. Primeiro tens de calcular só esta aqui e depois calcular esta aqui.

Joaquim: Ah ok, percebi. Então primeiro calculas o tan [tangente] de 39 graus.

Hélvio: Calculas este e este e depois somas.

Joaquim: Ok, então, mas o que é que usas como incógnita?

Hélvio: Aonde? Da altura?

Joaquim: Sim.

Hélvio: Uma letra qualquer! Fica x.

Com este diálogo verifica-se que, num primeiro momento, o Joaquim somou as amplitudes dos ângulos α e β, pois pretendia determinar a altura do monumento, aplicando apenas uma vez a razão trigonométrica tangente. Ao optar por esta resolução, o aluno demonstrou desconhecimento sobre a aplicabilidade das razões trigonométricas apenas a triângulos retângulos. Ao constatar esse erro, o Hélvio alertou o colega, identificando de seguida, os dois triângulos retângulos que efetivamente poderiam utilizar para determinar a altura pretendida.

Neste diálogo é ainda possível observar que foi uma dificuldade para o Joaquim, o facto de a imagem do enunciado não possuir letras suficientes para identificar todos os lados do triângulo, em particular, aquele que era necessário determinar. O Hélvio decidiu assim, escolher duas letras, x e y, para identificar as duas medidas de comprimento que teriam de calcular (Figura 27), verificando-se a *introdução de elementos auxiliares* para a resolução do problema.

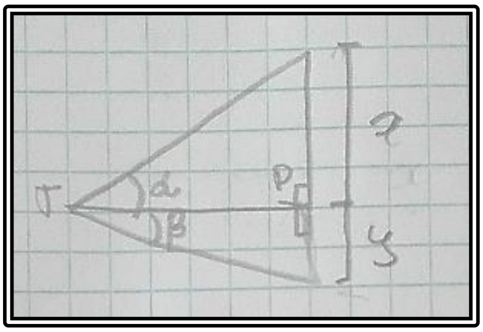


Figura 27 - Incógnitas atribuídas pelos alunos no problema 14.4.

Execução do plano

Após terem estipulado como é que iriam resolver o problema, os alunos não manifestaram grandes dificuldades nesta fase. Na figura seguinte (Figura 28) apresenta-se a resolução do Hélvio. Ao longo da resolução, os alunos estabeleceram um diálogo, sendo possível observar algumas dúvidas quanto à definição da razão trigonométrica tangente.

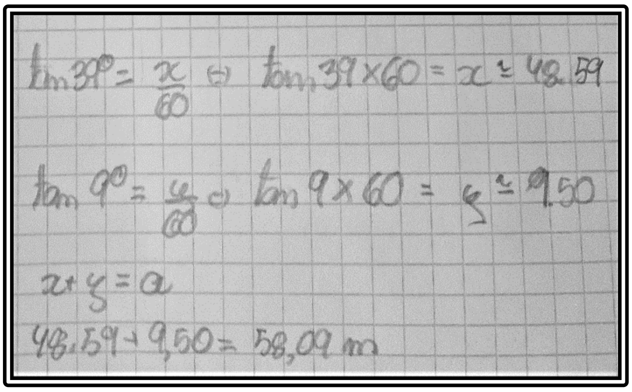


Figura 28 - Resolução do problema 14.4, pelo Hélvio.

> **Joaquim:** Então x é igual a tan de 39 grau vezes 60.
>
> **Hélvio:** O quê? Porque é que não fazes, tangente é igual a x sobre qualquer coisa? Não é muito melhor? Assim é menos confuso. Então fica, tangente de 39 é igual a x sobre 60, logo a tangente de 39 graus dá…
>
> **Joaquim:** Calma, a tangente é cateto oposto sobre cateto adjacente ou cateto adjacente sobre cateto oposto?
>
> **Hélvio:** Para confirmar, vais ao caderno aqui atrás (o aluno procurou as definições das razões trigonométricas, escritas anteriormente no caderno diário).
>
> **Joaquim:** É oposto sobre adjacente. Tens razão.

Os alunos começaram por determinar o valor de x *utilizando uma equação*. No início do diálogo, verifica-se que o Hélvio considerou ser importante começar por escrever a definição da razão trigonométrica e, só depois, resolver a equação em ordem à incógnita. É ainda possível verificar que, apesar de manifestarem algumas dúvidas relativamente à definição da razão trigonométrica, os alunos recorreram aos apontamentos do caderno diário, demonstrando, assim, autonomia.

Tal como no problema anterior, os alunos utilizaram a calculadora científica para determinar a medida de comprimento pretendida. Apesar de terem realizado corretamente este cálculo, os alunos deveriam ter utilizado nos cálculos intermédios, mais casas decimais do que aquelas que eram pedidas na resposta final.

Após determinar a medida de comprimento x, o Hélvio fez o seguinte comentário para o colega: “Pronto, agora o x já está feito [calculado], vamos ao y. E é para fazer a mesma coisa”. Com esta afirmação, o aluno pretendeu esclarecer que, quer a razão trigonométrica a utilizar, quer o procedimento, seriam os mesmos que foram realizados no passo anterior. Para finalizar, o Joaquim indicou: "Agora a altura é $x + y$, $48{,}59 + 9{,}50$ é igual a $58{,}09$ metros", tendo o Hélvio confirmado o cálculo através da calculadora.

Verificação dos resultados

Na Figura 28, é possível observar que os alunos determinaram a medida de comprimento pretendida, no entanto não existe uma referência explicita à altura do monumento, ou seja, os alunos não apresentaram uma resposta de acordo com o contexto do problema. No entanto, verifica-se que os alunos identificaram claramente a soma das duas medidas de comprimento x e y, igualando esta soma a uma incógnita a, onde é possível concluir que se referem efetivamente à altura.

O diálogo termina com os alunos a identificar a unidade de medida de comprimento. Assim, verifica-se que não existe uma reflexão sobre o resultado obtido, nomeadamente se este está ou não de acordo com os dados do problema.

Síntese

Ao longo dos diálogos os alunos evidenciam algumas dúvidas, no entanto, com o intercâmbio de conhecimentos e apoio nos seus recursos, estes foram capazes de ultrapassar essas mesmas dificuldades.

Relativamente às estratégias utilizadas, na primeira fase da resolução da tarefa, a ***Compreensão do problema***, os alunos recorreram à *utilização de um esboço para a representação dos dados do problema* e ainda *assinalaram os dados importantes do problema*, na medida em que os reescreveram no caderno diário. Na segunda fase, optaram por *utilizar uma equação* para determinar cada uma das medidas de comprimento pretendidas, *introduzindo elementos auxiliares* na figura, com o objetivo de denominar essas mesmas medidas.

No que concerne às dificuldades evidenciadas, tal como foi referido anteriormente, verifica-se algumas dúvidas relativamente às definições das razões trigonométricas. Para além disso, são evidenciadas lacunas ao nível da linguagem matemática e os alunos não apresentam uma resposta de acordo com o contexto do problema. No que respeita aos conhecimentos mobilizados, verifica-se a aplicação dos conteúdos sobre a trigonometria abordados este ano, bem como os conteúdos relativos a números e operações aprendidos em anos anteriores. De seguida, faz-se um esquema

(Quadro 9) sintetizando as estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos no problema 14.4 do manual adotado (Figura 25).

Quadro 9 - Síntese das estratégias e tópicos de aprendizagem mobilizados pelos alunos na resolução do problema 14.4.

Questão:	Estratégias:	Tópicos de aprendizagem:
14.4	• Utilizar um esboço para representação do problema. • Assinalar os dados importantes do problema. • Utilizar uma equação. • Introduzir elementos auxiliares.	• Definir as razões trigonométricas. • Resolver equações do 1.º grau. • Utilizar a calculadora para determinar os valores das razões trigonométricas. • Resolver problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas. • Arredondar números decimais.

5.3. Problema 1 da Ficha de Trabalho n.º 14

O enunciado apresentado na Figura 29 diz respeito ao problema 1 da Ficha de Trabalho n.º 14 (anexo 7). Este problema foi retirado, sem adaptação, da 1.ª Fase da Prova Final de 3.º Ciclo do ano de 2016. Nesta fase da intervenção letiva, já tinham sido lecionados todos os tópicos sobre trigonometria do programa.

Antes de iniciarem a resolução dos problemas desta ficha de trabalho, os alunos foram alertados sobre alguns cuidados a ter neste tipo de problemas, nomeadamente a extensão do texto e nesse sentido a importância de assinalar os dados relevantes para a resolução do problema; a presença das figuras na medida em que, na maioria das vezes, complementa e ajuda na compreensão do problema; e por fim a necessidade de dar uma resposta de acordo com a pergunta e o contexto do problema.

Tendo em conta que este problema foi resolvido em duas etapas pelos alunos, nas fases ***Elaboração de um Plano*** e ***Execução do Plano***, foi feita a análise tendo em conta essas duas etapas. A primeira, que consiste em verificar que estratégias foram evidenciadas pelos alunos tendo em conta a sugestão dada pelo enunciado do problema (determinar $\overline{TC}$), e a segunda com o mesmo propósito, mas relativamente à pergunta original do problema (determinar $\overline{MR}$).

1. A figura ao lado é uma fotografia do farol do Cabo de Santa Maria, situado na Ria Formosa, na Ilha de Culatra.

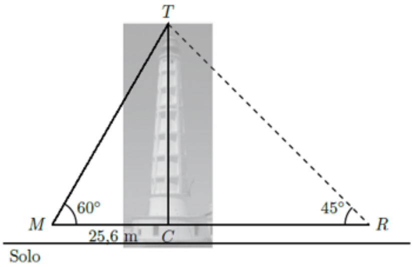
A Marta e o Rui estão a fazer um trabalho de trigonometria.

A Marta colocou-se num ponto a partir do qual podia observar o topo do farol segundo um ângulo de amplitude de 60°. Fez algumas medições e esboçou um esquema idêntico ao que se apresenta na figura seguinte.

Nesse esquema, o ponto T corresponde ao topo do farol, o ponto M corresponde ao ponto de observação da Marta, e o ponto R corresponde ao ponto de observação do Rui.

Relativamente ao esquema da figura ao lado (que não está desenhada à escala), sabe-se que:

- $[MCT]$ é um triângulo retângulo;
- O ponto R pertence à semirreta $\dot{M}C$;
- $T\hat{M}C = 60°$ e $T\hat{R}C = 45°$;
- $\overline{MC} = 25{,}6\ m$



Determina $\overline{MR}$, ou seja, determina a distância entre a Marta e o Rui. Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades.[1]

Sugestão: Começa por determinar $\overline{TC}$.

Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, 1ª fase

Figura 29 – Enunciado do problema 1 da Ficha de Trabalho n.º14.

Compreensão do problema

Para poder dar resposta a este problema, os alunos deveriam determinar duas medidas de comprimento, recorrendo à trigonometria. Os alunos parecem não ter prestado a necessária atenção ao enunciado, não o tendo lido na íntegra, algo que é possível verificar no diálogo seguinte:

> **Hélvio:** Vamos começar. A figura ao lado é uma (o aluno começa a ler o enunciado do problema), ah não vou ler isto tudo. Esquece isto. Temos aqui um triângulo e temos de determinar $\overline{MR}$.
>
> **Joaquim:** E repara: tem uma sugestão. Começa por determinar $\overline{TC}$ (o aluno lê a sugestão). Não sei porquê, mas se é sugestão, vamos fazer.

Através do diálogo, é visível que não houve uma compreensão do enunciado do problema, na medida em que os alunos optaram por seguir a sugestão, sem tentar perceber qual seria o passo seguinte, ou o porquê da necessidade de determinar $\overline{TC}$. Nesta fase, e contrariamente ao que tinha sido habitual, os alunos não utilizaram um esboço para representar os dados do problema, ou assinalarem os dados importantes.

Podemos ainda observar que os alunos simplificam o problema optando por *focar-se unicamente na figura*. Neste caso em particular, essa opção não altera o grau de desafio da tarefa, uma vez que os dados presentes no texto, são também aqueles que a são apresentados na figura.

Elaboração de um plano:

Tal como já foi referido anteriormente, os alunos optaram por *resolver o problema por partes*. Observe-se primeiramente como é que os alunos estabeleceram um plano para determinar $\overline{TC}$:

Joaquim: Então temos de determinar $\overline{TC}$. Fazemos o cos [cosseno].

Hélvio: Não. Fazemos o seno, o seno é com o oposto. Então vamos pensar melhor. Sabes que este aqui mede $45°$ (referindo-se a $C\hat{T}B$) e este aqui mede $30°$ (referindo-se a $C\hat{T}M$). Que ângulo queres usar?

Joaquim: Vamos usar o 60 (referindo-se ao $C\widehat{M}T$). O 25,6 é adjacente do 60, logo é o cosseno.

Hélvio: E o $\overline{TC}$ é o oposto do 60, logo é o seno.

Joaquim: Estamos a fazer isto mal! Lembraste daqueles problemas da outra aula? Aqueles problemas que tinhas aquelas perguntas que a professora estava sempre a repetir!

Hélvio: Ah já me lembro. Deixa procurar aqui no manual. É isto. Quais são os dados do problema?

Joaquim: Ângulo de 60 graus e cateto adjacente de 25,6 metros.

Hélvio: Boa. E agora, o que queremos determinar?

Joaquim: $\overline{TC}$

Hélvio: Ok, mas $\overline{TC}$ é o quê relativamente ao ângulo?

Joaquim: Cateto oposto.

Hélvio: Interroga-te: Qual a razão trigonométrica que relaciona o cateto adjacente com o oposto?

Joaquim: É o tan [tangente].

Hélvio: Então pronto. É essa a razão trigonométrica.

No início do diálogo, é visível que os alunos não estavam de acordo relativamente à escolha da razão trigonométrica. O Joaquim teve em consideração apenas a amplitude do ângulo e a medida de comprimento conhecida, e como consequência, achou que a razão trigonométrica a aplicar era o cosseno. Já o Hélvio, com um raciocínio idêntico, relacionou o ângulo com a medida de comprimento que pretendia determinar, e sendo esta medida correspondente ao cateto oposto ao ângulo, o aluno defendeu a utilização da razão trigonométrica seno. Ainda nesta fase, observa-se que, através do conhecimento sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, os alunos identificaram corretamente as amplitudes de todos os ângulos presentes na figura e perceberam que poderiam aplicar as razões trigonométricas a partir de qualquer um deles. Isto foi visível quando o Hélvio perguntou: "Que ângulo queres usar?".

Após esta breve discussão, o Joaquim *recordou problemas resolvidos anteriormente*, nomeadamente, o método utilizado na sua resolução. Durante a realização desses problemas, foram indicadas pela professora, as perguntas chave que constavam no manual, e que deveriam ser respondidas quando estivessem na presença de uma tarefa de trigonometria com triângulos retângulos: "Quais são os dados do problema?", "O que queremos determinar?" e por fim "Interroga-te: Que razão trigonométrica, relaciona os dados do problema com o que queremos determinar?". A escolha desta estratégica resultou numa escolha correta da razão trigonométrica a utilizar.

Na fase seguinte, ***Execução do plano***, será visível como é que os alunos procederam quanto ao cálculo da medida de comprimento $\overline{TC}$. Porém, e ainda nesta fase, interessa perceber qual foi o passo seguinte relativamente a esse cálculo, ou seja, que plano é que os alunos elaboraram para determinar a distância entre a Maria e o Rui.

Joaquim: Bom, $\overline{TC}$ deu 44,34. E agora, a partir deste processo podes calcular a hipotenusa.

Hélvio: Hipotenusa? Mas porque é que queres calcular a hipotenusa se o que queres é o $\overline{MR}$?

Joaquim: Ah pois, é verdade. Depois de calculares este aqui (referindo-se a $\overline{TC}$) que é cateto oposto, precisas de saber este aqui (referindo-se a $\overline{CR}$) que é adjacente.

Hélvio: Então qual a razão trigonométrica que relaciona esses dois? Tangente outra vez.

Com este diálogo é visível que o Joaquim não tinha claro para si qual o objetivo do problema. Quando o aluno se referiu à hipotenusa, pretendia determinar $\overline{TM}$, o que efetivamente não era útil para determinar $\overline{MR}$. Esta é uma das consequências de o aluno não ter realizado uma boa interpretação do problema. Posteriormente quando o seu colega faz a observação do que se pretende calcular, o Joaquim rapidamente estabelece uma comparação com o cálculo anterior, e ambos escolheram corretamente a razão trigonométrica a utilizar. Só após executarem este plano, que é analisado na fase seguinte, é que os alunos referenciam que a medida de comprimento pretendida, ou seja $\overline{MR}$, é obtida através da soma entre $\overline{CR}$ e $\overline{MC}$.

Execução do plano

Tal como sucedeu para a fase anterior, começa-se por analisar a execução do plano traçado para determinar $\overline{TC}$. Na figura seguinte (Figura 30) apresenta-se a resolução da primeira fase do problema, do Joaquim.

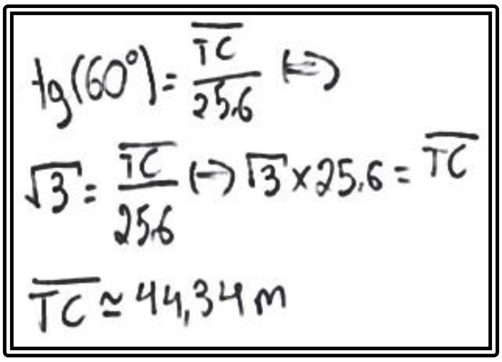


Figura 30 – Resolução da primeira fase no problema 1, pelo Joaquim.

Durante a resolução, os alunos trocaram algumas ideias, visíveis no diálogo seguinte:

> **Joaquim:** Então, agora é fácil. Tangente de 60 graus, é igual a $\overline{TC}$ sobre 25,6. Agora vamos à calculadora e a tangente de 60 é…
> **Hélvio:** Calma. É 60 graus. Caso não saibas, e se bem me lembro, olha aqui. Tens esta tabela no teu caderno! (referindo-se à tabela das razões trigonométricas dos ângulos com amplitudes de referência). Porque estás a fazer as contas se já sabes o resultado?
> **Joaquim:** Então depois divide ou multiplica por 25,6?
> **Hélvio:** Tangente de 60 é raiz de 3.

Joaquim: Então fica raiz de 3 igual a $\overline{TC}$ sobre…

Hélvio: O resultado todo é raiz de 3.

Joaquim: e o 25,6 desaparece?

Hélvio: Sim!

Joaquim: Isso não é assim.

Hélvio: O que é que estás a fazer?

Professora: Explique lá ao seu colega aquilo que está a fazer?

Joaquim: Então, a tangente de 60 graus é que é raiz de 3, e passas o 25 [25,6] para o lado da raiz de 3 a multiplicar e depois dá o resultado.

Hélvio: Ah já percebi, estava a fazer confusão.

Na primeira parte do diálogo, o Hélvio observou que 60°, é uma das amplitudes de referência estudadas em sala de aula, e que, tendo isso em atenção, não seria necessário recorrer à calculadora para determinar esse valor. Porém , no momento seguinte, surge uma ligeira confusão, na medida em que o aluno assume que, o valor de $\overline{TC}$ é já $\sqrt{3}$. Ao não concordar com aquilo que o colega disse, o Joaquim iniciou a resolução individualmente. A professora, ao observar que tinha deixado de haver uma interação entre os alunos, sugeriu ao Joaquim que explicasse ao seu colega aquilo que estava a realizar. Após essa explicação, é visível o esclarecimento do Hélvio.

Analisando agora o procedimento dos alunos no que concerne ao cálculo de $\overline{MR}$, é possível constatar alguma confusão no diálogo que foi estabelecido entre eles. Na fase ***Elaboração de um plano***, já tinha sido observado que os alunos tinham optado e de forma correta pela razão trigonométrica tangente.

Joaquim: Então, vamos acrescentar aqui (referindo-se a $\overline{TC}$) o 44,34. Agora tangente de 60 graus é igual a $\overline{CR}$ sobre ... ok não, SOH-CAH-TOA, oposto, adjacente. Tangente de 60 graus é igual a 44,34 sobre $\overline{CR}$. $\overline{CR}$ é igual a 44,34 sobre $\sqrt{3}$. E isto dá 25,6. Olha, isto dá a mesma coisa?

Hélvio: Deve estar mal. Calma, tu já bloqueaste. Espera um bocado que eu já te ajudo.

Joaquim: Ah já percebi qual foi o erro. Eu meti tangente de 60 graus e é tangente de 45 graus. Quanto é a tangente de 45 graus?

Hélvio: Também está no caderno.

Joaquim: Ah é 1. Então e agora?

Hélvio: Então agora $\overline{MR}$ é igual a $\overline{CM}$ mais $\overline{CR}$.

Joaquim: Então fica $\overline{CR}$ mais $\overline{MC}$, que é igual a 25,6 mais 44,34 que é aproximadamente 70.

Logo na primeira intervenção do Joaquim é possível observar que os alunos compreenderam que, para poder determinar a medida de comprimento agora pretendida seria necessário *introduzir elementos auxiliares na figura*, nomeadamente o valor de $\overline{TC}$, acabado de calcular. De seguida, foi evidente alguma desatenção, bem como uma dificuldade ao nível da definição da razão trigonométrica tangente. Ao constatar que obteve um valor idêntico àquele que estava na figura, o aluno percebeu que algo deveria estar mal resolvido e foi capaz de perceber onde é que estava o erro. À semelhança da amplitude de 60°, os alunos também recordaram que 45° também era uma amplitude de referência.

Na figura seguinte (Figura 31) observa-se a resolução da segunda fase do problema, do Joaquim. Na figura 30 e na figura 31 verifica-se que os alunos *utilizaram uma equação* para determinar as respetivas medidas de comprimento pretendidas.

$$tg(45)^\circ = \frac{44.34}{\overline{CR}} \Leftrightarrow \overline{CR} = \frac{44.34}{1}$$

$$\overline{CR} \simeq 44,34$$

$$\overline{CR} + \overline{MC} = 25.6 + 44,34 \simeq 70 \text{ m}$$

Figura 31 - Resolução da segunda fase do problema 1, pelo Joaquim.

Verificação dos resultados

Na figura 30 e na figura 31 observa-se que os alunos determinam corretamente a medida de comprimento pretendida, apresentando o valor aproximado às unidades tal como era pedido no enunciado. Retome-se o diálogo dos alunos no momento final da resolução tarefa:

Joaquim: Então fica $\overline{CR}$ mais $\overline{MC}$, que é igual a 25,6 mais 44,34 que é aproximadamente 70.

Hélvio: Unidade? Metros.

Joaquim: Sim, não iam ser centímetros, é uma torre.

Hélvio: É um farol.

Joaquim: Falta escrever a resposta ao problema.

Apesar de, na fase de ***Compreensão do problema***, ter-se constatado que os alunos não leram o enunciado com toda a atenção necessária, nesta fase é visível, ainda que de uma forma ligeira, uma reflexão sobre o resultado. O valor final obtido não corresponde à altura do farol, apesar de ser essa a referência feita pelos alunos no diálogo. No entanto existe efetivamente uma ligação entre o valor e a unidade de medida com o contexto do problema, e os alunos, realizaram essa observação. Na figura seguinte (Figura 32), observa-se a resposta dos alunos de acordo com o contexto do problema.


R.: A distância entre a Marta e o Rui é aproximadamente 70 m.

Figura 32 - Resposta ao problema 1, pelo Joaquim.

Síntese

Entre todos os problemas observados até então, este foi o primeiro em que os alunos decidiram *resolvê-lo por partes*. Tendo isso em consideração, a análise deste problema tornou-se mais complexa, uma vez ter sido necessário desdobrar as fases de ***Elaboração de um plano*** e ***Execução do plano***.

Na resolução deste problema, os alunos realizaram, embora com pouca clareza, uma reflexão sobre o resultado final, evidente ao nível da discussão sobre as unidades de medida. Tiveram ainda a preocupação de apresentar uma resposta de acordo com o contexto do problema. No entanto, na fase da ***Compreensão do problema,*** foi evidente uma despreocupação com o contexto da tarefa, pelo que os alunos optaram por restringir-se à figura matemática disponibilizada, *simplificando assim o problema*.

Para além das estratégias *focar-se apenas na figura,* simplificando o problema e *resolver o problema por partes,* na fase de ***Elaboração de um plano,*** os alunos recorreram à estratégia de *recordar um problema relacionado,* não pela semelhança com o enunciado, mas pela forma como procederam para alcançar o resultado pedido.

Para isso, foram respondendo às tais perguntas chave que os ajudaram a reconhecer qual a razão trigonométrica a utilizar. Na fase de ***Execução do plano,*** utilizaram a *introdução de elementos auxiliares* bem como a *utilização de uma equação* para determinar as medidas de comprimento pedidas.

Relativamente às dificuldades evidenciadas, verifica-se algumas incorreções na linguagem oral matemática ao nível da resolução das equações de 1.º grau, principalmente quando os alunos se referem às mudanças de membro. No que concerne aos conteúdos, foram observadas dificuldades ao nível da definição da razão trigonométrica tangente, sendo também evidente a utilização da mnemónica *SOH-CAH-TOA*, para minimizar essa dificuldade. Algumas dificuldades pontuais foram ultrapassadas devido ao modo de trabalho a pares.

No que respeita aos conhecimentos mobilizados, verifica-se a aplicação dos conteúdos sobre a trigonometria abordados este ano, nomeadamente a definição e utilização das razões trigonométricas de ângulos agudos e a resolução de problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando as razões trigonométricas dos ângulos de 45° e 60°. Bem como os conteúdos relativos a equações e a números e operações aprendidos em anos anteriores. De seguida, apresenta-se um esquema (Quadro 10) com as estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos no problema 1 (Figura 29) da Ficha de Trabalho n.º 14.

Quadro 10 - Síntese das estratégias e tópicos de aprendizagem mobilizados pelos alunos na resolução do problema 1 da Ficha de Trabalho n.º14.

Questão:	Estratégias:	Tópicos de aprendizagem:
1	• Focar apenas na figura. • Resolver do problema por partes. • Pensar num problema relacionado. • Utilizar de uma equação. • Introduzir elementos auxiliares.	• Definir as razões trigonométricas. • Resolver equações do 1.º grau. • Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando as razões trigonométricas dos ângulos de 45°, 30° e 60°. • Arredondar números decimais.

5.4. Problema 2 da Ficha de Trabalho n.º 15

O enunciado apresentado na figura 33 corresponde o ao problema 1 da Ficha de Trabalho n.º15 (Anexo 8). Este problema foi retirado do manual Pi9 – Matemática de 9º ano (Magro, Fidalgo e Lourenço, 2015). Esta ficha de trabalho, tal como já foi referido anteriormente, tinha o objetivo de consolidar conhecimentos. Como é visível no enunciado do problema, é indicada alguma informação que em nada contribui para a resolução do problema, sendo que os dados efetivamente necessários são fornecidos na figura.

2. O Templo Expiatório da Sagrada Família de Barcelona começou a ser construído a 19 de março de 1882 e ainda hoje se encontra inacabado. Aquando da sua visita a Barcelona, o Pedro ficou impressionado com a arquitetura desta obra da autoria do catalão Antoni Gaudí. Atendendo aos dados da figura, determina a altura (em metros), com aproximação às unidades, da torre da catedral que se encontra em destaque no esquema ao lado.

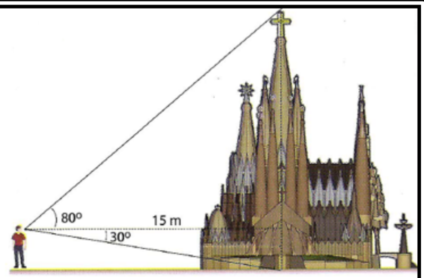


Figura 33 - Enunciado do problema 2 da Ficha de Trabalho n.º15.

Compreensão do problema

Neste problema, a altura do monumento era obtida pela soma de duas medidas de comprimento. Como é possível observar pelo enunciado, a figura não apresenta letras para designar as medidas, e isso poderia ser logo à partida, uma dificuldade para os alunos. Podemos verificar no diálogo seguinte que os alunos tiveram algum cuidado na leitura do enunciado do problema, bem como na análise da figura que continha os dados.

Joaquim: O Templo Expiatório da Sagrada Família … (o aluno lê o enunciado da tarefa). Olha, ainda não está acabado?

Hélvio: Pois, era isso que ia dizer: começou a ser construído em 1982 e ainda não está acabado? Aquando da sua visita a Barcelona … (o aluno termina a ler o enunciado), há uma música sobre Barcelona.

Joaquim: Ok. Basicamente tens de saber a altura em metros lá do templo.

Hélvio: Exato. Tens o cateto adjacente.

Joaquim: Calma. Desenha primeiro o triângulo, mete aí x e y, que é o que vamos calcular, é melhor.

Hélvio: Ok, concordo contigo.

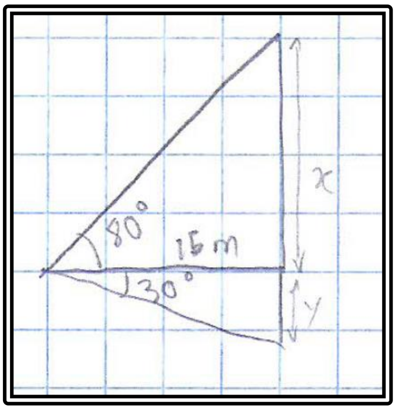


Figura 34 - Representação esquemática do problema com atribuição de incógnitas, pelo Joaquim.

Na imagem anterior (Figura 34) é possível observar a que desenho é que o Joaquim se referiu, ou seja, os alunos realizaram um *esboço para a representação dos dados do problema*. Os alunos compreenderam que tinham de determinar duas medidas de comprimento distintas, e sentiram a necessidade de *introduzir elementos auxiliares* na figura, neste caso, o x e o y. Durante o diálogo é possível reparar que os alunos discutiram um pouco sobre o monumento em questão, apesar de ser algo que não tem implicação para a resolução do problema. A expressão do Joaquim, "Basicamente tens de saber a altura em metros lá do templo", transmite a ideia de que compreenderam o enunciado do problema.

Elaboração de um plano

Observe-se o diálogo estabelecido pelos alunos após a interpretação do problema, apresentada na fase anterior. No diálogo anterior, o Hélvio já tinha referido que o cateto conhecido era adjacente ao ângulo.

Joaquim: A altura é fácil, só tens de fazer assim, *SOH-CAH-TOA*, é o cosseno.

Hélvio: Tens de fazer o cosseno, sim, é o que ia dizer.

Joaquim: Cosseno de 80 graus é igual. Não é cosseno! É a tangente, porque eles querem saber a altura.

Hélvio: Então, mas, ah pois tens razão.

Joaquim: Quer dizer, também podias determinar o cosseno, e depois ficavas com a hipotenusa e depois fazias [aplicavas] o Teorema de Pitágoras. Mas dá mais trabalho.

Hélvio: Pois, é melhor usar logo a tangente.

O diálogo estabelecido pelos alunos é referente ao triângulo com um ângulo de amplitude 80° e é possível observar que, num primeiro momento os alunos iriam utilizar a razão trigonométrica cosseno, não por manifestarem dificuldades na definição das razões trigonométricas, até porque o aluno utiliza uma mnemónica com essa utilidade, mas porque iriam determinar a medida de comprimento da hipotenusa em vez da do cateto oposto ao ângulo, que neste problema representa uma parte da altura do monumento. Esta medida de comprimento, os alunos designaram por x. Relativamente à medida de comprimento y, os alunos não elaboraram um plano, tendo passado de imediato para a sua resolução.

É ainda importante referir as duas estratégias de resolução evidenciadas pelos alunos, bem como a perceção daquela que implicava menos cálculos.

Execução do plano

Após terem concluído que razão trigonométrica deveriam utilizar, os alunos passaram à realização dos cálculos. Na figura seguinte (Figura 35) observa-se o procedimento dos alunos relativamente à medida de comprimento x.

$$tg(80°) = \frac{x}{15} \Leftrightarrow tg(80°) \times 15 = x$$

$$x = 85,069\ m$$

Figura 35 – Cálculo do valor de x do problema 2, pelo Joaquim.

Durante a resolução, os alunos realizaram o seguinte diálogo:

Joaquim: Então vá, *SOH-CAH-TOA*, fica x sobre 15. Então agora fica tangente de 80 vezes 15 igual a x, ou então, x é igual a tangente de 80 vezes 15. x é igual a 85… eles querem quantas casas decimais? Às unidades, então vamos meter 85,069, porque são cálculos intermédios.

Hélvio: Isso é metros, não te esqueças de pôr metros. Então agora o y.

Joaquim: Agora a de y fica tangente de $30°$ é igual a y sobre 30.

Hélvio: Tangente de 30 é igual a 15 sobre y. Não te esqueças que agora não é vezes.

Joaquim: Como não é vezes?

Hélvio: Então, este aqui é o adjacente, o 15 é o adjacente.

Joaquim: Sim.

Hélvio: Então fica aqui em cima (referindo-se ao numerador da fração)

Joaquim: Não. Fica em baixo. Oposto sobre adjacente.

Hélvio: Tens razão.

No cálculo do valor de x (Figura 35), verifica-se que os alunos *utilizam uma equação* para determinar a incógnita. Após determinarem o resultado através da calculadora, mostraram cuidado em utilizar mais casas decimais do que aquelas que são pedidas no enunciado do problema, sendo que o Joaquim expressou claramente a razão para tal.

Para determinar o valor da incógnita y, visível na figura seguinte (Figura 36), os alunos também *utilizaram uma equação*, no entanto, esses cálculos não são evidenciados no diálogo dos alunos. Ao determinar esse valor, podemos observar que o Hélvio demonstrou uma dificuldade ao nível da definição de tangente, apesar de ter realizado um cálculo idêntico anteriormente. Para além disso, e apesar de isso não ser relevante para a resolução, os alunos não reconheceram que $30°$ era uma amplitude de referência.

Na figura seguinte (Figura 36) observa-se o procedimento utilizado para determinar o valor de y, bem como a altura do monumento que os alunos representaram por alt.

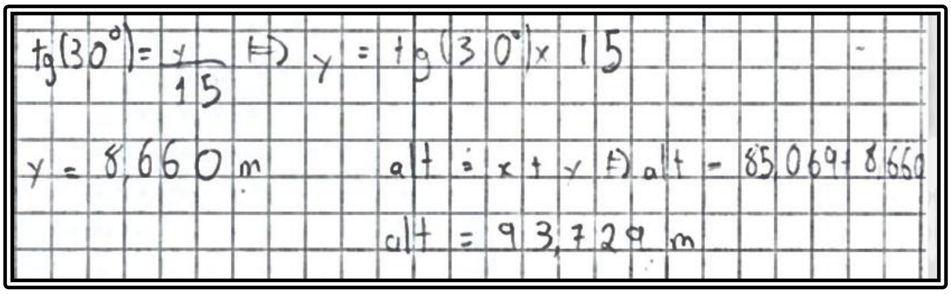


Figura 36 - Cálculo do valor de y e da altura do problema 2, pelo Joaquim.

Hélvio: Ok, agora é só calcular o $x + y$.

Joaquim: Sim porque $x + y$ é igual à altura do monumento. Dá 93,729, mas é às unidades. Portanto fica 7 [93,7].

Hélvio: É às unidades, não às décimas.

Neste diálogo é explícito que os alunos compreenderam o objetivo do problema, ou seja, que a altura do monumento era obtida através da soma de duas medidas de comprimento. Foi ainda visível uma dificuldade ao nível das casas decimais: o Joaquim evidenciou uma confusão entre décimas e unidades.

Verificação dos resultados

Na figura 36 observa-se que os alunos determinaram corretamente a medida de comprimento pretendida, apresentando o valor aproximado às unidades tal como era pedido no enunciado. Retome-se o diálogo dos alunos no momento final da resolução tarefa:

Joaquim: Sim porque $x + y$ é igual à altura do monumento. Dá 93,729, mas é às unidades. Portanto fica 7 [93,7].

Hélvio: É às unidades, não às décimas. Metros. Não te esqueças da resposta.

Joaquim: Ah pois é. Fica 94. Resposta: a altura da Catedral é aproximadamente 94 metros.

No diálogo anterior observa-se que o Hélvio relembrou a necessidade de dar a resposta ao problema (Figura 37). Para além disso, o Joaquim reconheceu o seu erro relativamente às casas decimais e deu corretamente a resposta final. Apesar de os alunos terem dado a resposta de acordo com o contexto do problema, observa-se que não existe uma reflexão sobre o valor propriamente dito.

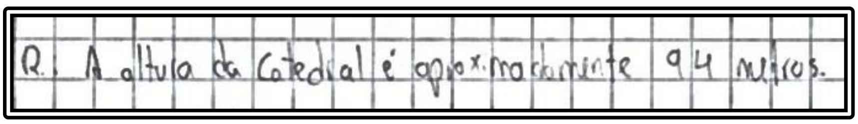


Figura 37 - Resposta ao problema 2, pelo Joaquim.

Síntese

Durante a resolução deste problema foi visível a grande importância do trabalho colaborativo. Em várias situações os alunos trocaram ideias e conhecimentos fazendo a sua autonomia e capacidade de resolução aumentasse comparativamente com as aulas em que os alunos trabalharam individualmente.

Na fase da ***Compreensão do problema***, os alunos realizaram a leitura integral do enunciado do problema, fazendo algumas observações relativamente ao contexto da tarefa referindo, por exemplo o aspeto da construção. Nesta fase, os alunos usaram estratégias como *utilização de um esboço para a representação dos dados do problema* tendo, nesse esquema, *introduzido elementos auxiliares*. Neste esquema (Figura 34) e durante a resolução, nenhum dos alunos fez referência à necessidade de os triângulos serem retângulos e o porquê de o serem. Na fase ***Elaboração de um plano,*** os alunos não recorreram a nenhuma heurística, no entanto apresentaram uma outra forma de resolução do problema. Ainda nesta fase, foi visível que os alunos apenas elaboraram o plano para determinar o valor de x. Relativamente ao valor de y não foi feito qualquer referência, bem como ao cálculo final da altura do monumento. No momento seguinte, na ***Execução do plano,*** foi utilizada *uma equação* para determinar as medidas de comprimento pedidas.

Relativamente às dificuldades evidenciadas, verifica-se algumas dúvidas relativamente às definições das razões trigonométricas pelo Hélvio. A recorrente utilização da mnemónica *SOH-CAH-TOA*, pelo Joaquim pareceu minimizar essa dificuldade. O trabalho em grupo ajudou a colmatar estas dificuldades, uma vez que em nenhum momento, os alunos pediram a intervenção da professora apesar das adversidades ao longo da resolução. Ao nível da linguagem matemática, na figura 35 e na figura 36, os alunos utilizaram uma igualdade apesar de ser uma aproximação.

No que respeita aos conhecimentos mobilizados, verifica-se a aplicação dos conteúdos sobre a trigonometria abordados este ano, nomeadamente a definição e utilização das razões trigonométricas de ângulos agudos e a resolução de problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos agudos dados e as respetivas razões trigonométricas dadas por uma máquina de calcular, bem como os conteúdos relativos a equações e a números e operações lecionados nos anos anteriores. Aos níveis dos conhecimentos é ainda importante referir a utilização de mais casas decimais nos cálculos intermédios, sem que isso tivesse referido no enunciado da tarefa. De seguida, apresenta-se um esquema (Quadro 11) com as estratégias e conhecimentos mobilizados pelos alunos no problema 2 (Figura 33) da Ficha de Trabalho n.º 15.

Quadro 11 - Síntese das estratégias e tópicos de aprendizagem mobilizados pelos alunos na resolução do problema 2 da Ficha de Trabalho n.º15.

Questão:	Estratégias:	Tópicos de aprendizagem:
2	• Introduzir elementos auxiliares. • Utilizar de uma equação.	• Definir as razões trigonométricas. • Utilizar a calculadora para determinar os valores das razões trigonométricas. • Resolver problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas. • Resolver equações do 1.º grau. • Arredondar números decimais.

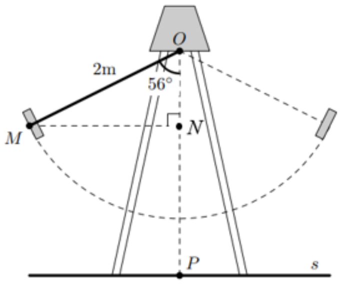
5.5. Problema 5 da Questão-aula

O enunciado apresentado na figura 38 diz respeito ao problema 5 da Questão-aula (Anexo 10). Este problema foi retirado, sem adaptação, da Época Especial da Prova Final de 3.º Ciclo do ano de 2017. Como é habitual nestas tarefas de provas nacionais sobre trigonometria, o enunciado apresenta uma sugestão e tem um contexto de semi-realidade.

5. Na figura seguinte, está representado um esquema de um baloiço num instante em que a cadeira do baloiço se encontra na posição assinalada com o ponto M. No esquema, o segmento de reta $[OM]$ representa o cabo do baloiço e a reta s representa o solo.

Sabe-se que:

- O ponto P é o pé da perpendicular traçada do ponto O para a reta s;
- O ponto N é o pé da perpendicular traçada do ponto M para a reta OP;
- $M\hat{O}N = 56°$;
- $\overline{OM} = 2\ m$;
- $\overline{OP} = 2{,}5\ m$.



A figura não está desenhada à escala.

Determina $\overline{NP}$, ou seja, determina a distância da cadeira ao solo quando esta se encontra no ponto M.

Apresenta o valor pedido em metros, arredondado às centésimas. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva, pelo menos, três casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Sugestão: Começa por determinar $\overline{ON}$.

Prova Final 3.º Ciclo – 2017, Época especial

Figura 38 – Enunciado do problema 5 da Questão-aula.

Na figura 39 e na figura 40, apresenta-se a resolução do problema pelo Joaquim e pelo Hélvio, respetivamente. É evidente que houve uma compreensão do problema, uma vez que ambos o resolveram. Os dois alunos escolheram e aplicaram corretamente a razão trigonométrica cosseno e na sua resolução *utilizaram uma equação* para determinar o valor de $\overline{ON}$. Outro aspeto em comum, foi os alunos evidenciarem dificuldades relativamente aos arredondamentos e designação das casas decimais. O Joaquim apresentou o número de casas decimais corretas, no entanto o seu arredondamento está incorreto. O Hélvio por sua vez realizou bem o arredondamento, mas não com o número de casas decimais pedidas pelo enunciado.

$\cos(56°) = \frac{\overline{ON}}{2} \Leftrightarrow \overline{ON} = \cos(56°)\times 2 \Leftrightarrow \overline{ON} = 1{,}118\ m$

$\overline{OP} = 2{,}5m$

$\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON}$ $\quad \overline{NP} = 2{,}5 - 1{,}118 \simeq 1{,}39\ m$

R.: $\overline{NP}$ é aproximadamente 1,39 metros.

Figura 39 – Resolução do problema 5 da Questão-aula, pelo Joaquim.

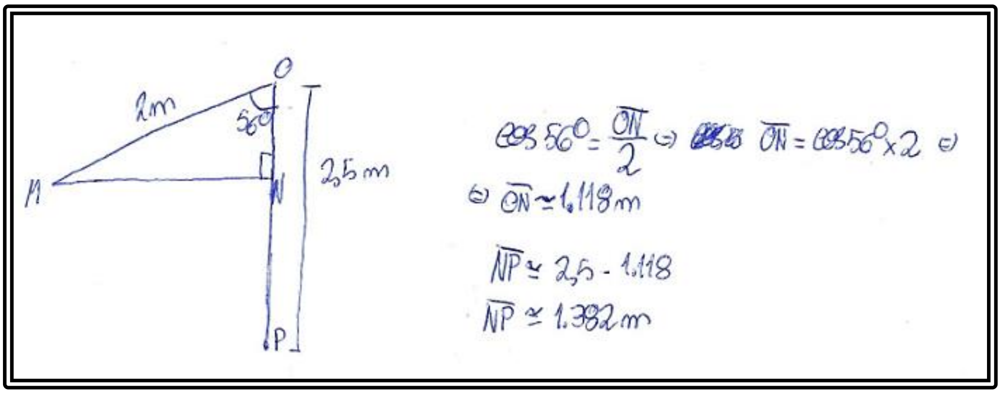


Figura 40 – Resolução do problema 5 da Questão-aula, pelo Hélvio.

As grandes diferenças entre as duas resoluções dos alunos estão na *utilização de um esquema para representação dos dados do problema* por parte do Hélvio e na resposta ao problema realizada pelo Joaquim. Apesar do aluno ter dado a resposta, esta não foi de acordo com o contexto do problema: “determina a distância da cadeira ao solo”.

Em suma, os alunos evidenciaram conhecimentos relativos às definições das razões trigonométricas e na resolução de problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos dados e as respetivas razões trigonométricas dadas por uma máquina de calcular. Porém, demonstraram dificuldades em conteúdos lecionados em anos anteriores, nomeadamente no campo dos números. As estratégias visíveis nas suas resoluções são a *utilização de uma equação*, bem como a *utilização de esquemas*, sendo que esta última apenas utilizada pelo Hélvio. Relativamente à escrita matemática, observou-se a incorreta utilização do sinal de igualdade na resolução do Joaquim.

5.6. Problema 7 da Ficha de Avaliação

O enunciado apresentado na Figura 41 diz respeito ao problema 7 da Ficha de avaliação sumativa (Anexo 9). Este problema foi retirado com algumas adaptações das propostas de testes enviadas por uma editora. Uma possibilidade para a resolução deste problema, seria determinar duas medidas de comprimento ($\overline{CD}$ e $\overline{AB}$) e de seguida somá-las ao valor $1{,}6\ m$.

7. A Maria estava a brincar com um balão e este ficou preso num poste. Observa a figura seguinte, onde se verifica que:

$[ABC]$ é triângulo retângulo em A;

$[CDE]$ é triângulo retângulo em D;

$[AC]$ é paralelo a $[DE]$

$\overline{CB} = 5\,m$ e $\overline{DE} = 1{,}4\,m$;

$C\hat{E}D = 70°$ e $A\hat{C}B = 30°$

A Maria tem 1,6 $metros$ de altura.

Determina a distância do balão, no ponto B, ao solo.

Apresenta a resposta com aproximação às décimas do metro.

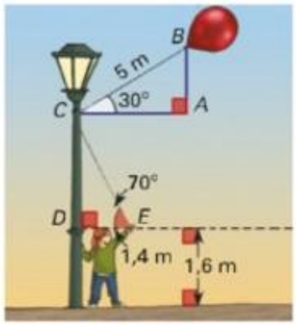


Figura 41 – Enunciado do problema 7 da Ficha de avaliação.

Nas duas figuras seguintes (Figura 42 e 43) observa-se as resoluções do Joaquim e do Hélvio, respetivamente. Os dois alunos compreenderam o objetivo da tarefa uma vez que determinaram as medidas de comprimento necessárias para dar a resposta ao problema. Na sua resolução, os alunos *utilizaram uma equação* para determinar $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

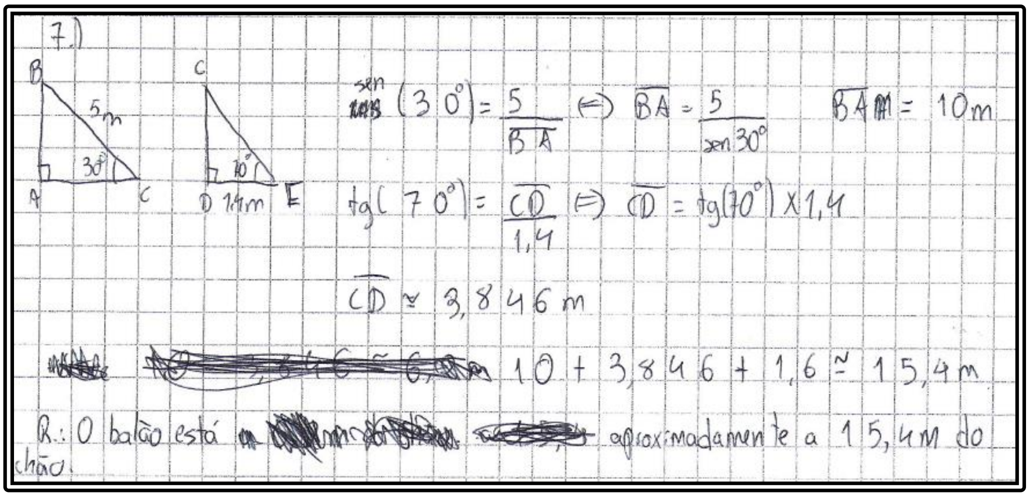
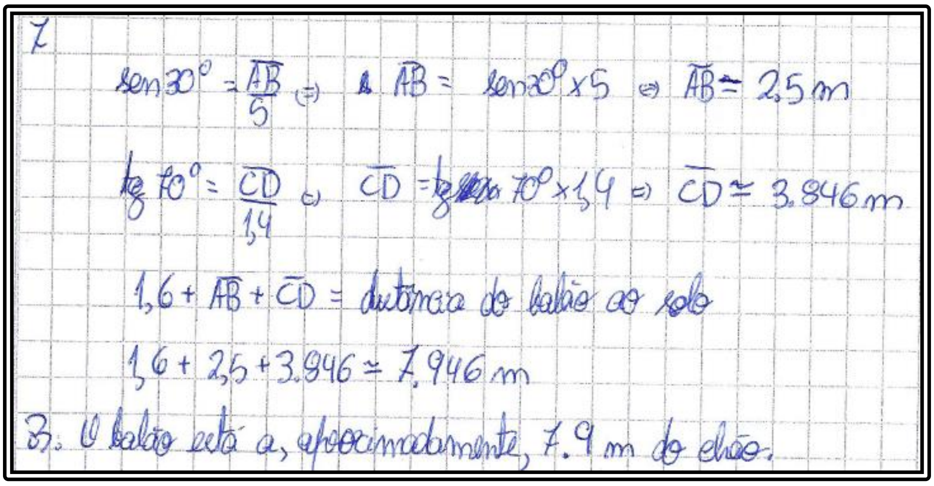


Figura 42 – Resolução do problema 7 da Ficha de avaliação, pelo Joaquim.


7

$sen 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = sen 30^\circ \times 5 \Leftrightarrow \overline{AB} \simeq 2,5 m$

$tg 70^\circ = \frac{\overline{CD}}{1,4} \Leftrightarrow \overline{CD} = tg 70^\circ \times 1,4 \Leftrightarrow \overline{CD} \simeq 3.846 m$

$1,6 + \overline{AB} + \overline{CD} =$ distância do balão ao solo

$1,6 + 2,5 + 3.846 \simeq 7,946 m$

R: O balão está a, aproximadamente, 7.9 m do chão.

Figura 43 – Resolução do problema 7 da Ficha de avaliação, pelo Hélvio.

Na resolução do Joaquim (Figura 42) é visível o erro na aplicação da razão trigonométrica seno, apesar de o aluno a identificar corretamente. O aluno trocou a medida do cateto oposto pela medida da hipotenusa na definição. Isto revela que não houve uma reflexão sobre o resultado obtido, uma vez que, a hipotenusa sendo o lado mais longo do triângulo retângulo, o valor de $\overline{AB}$ nunca poderia ser superior a $5\ m$. Relativamente ao cálculo de $\overline{CD}$, o aluno não revelou erros. Na resolução do Hélvio, não existem erros a assinalar. Relativamente aos arredondamentos e número de casas decimais, os alunos não manifestaram dificuldades.

Em suma, os alunos evidenciaram conhecimento das definições das razões trigonométricas, apesar do Joaquim ter confundido a definição de seno, e mostraram capacidade de resolução de problemas utilizando a calculadora científica. Ainda no que concerne aos conhecimentos evidenciados, apesar de os alunos se terem confrontado com uma amplitude de referência, 30°, nenhum deles revelou conhecimento sobre o seu valor exato. Nas suas resoluções foi possível observar a *utilização de uma equação* e na resolução do Joaquim a *utilização de esquemas* para representar os triângulos do problema. Qualquer um dos alunos deu a resposta ao problema de acordo com o seu contexto.

Ao nível do uso da linguagem matemática, não existem erros a assinalar.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Neste capítulo começa-se por realizar uma breve síntese do estudo realizado e de seguida, apresentam-se as conclusões deste estudo, procurando responder às questões de investigação. Por fim, faz-se uma reflexão global sobre a experiência de lecionação da unidade de ensino, fazendo referência aos problemas e dificuldades enfrentados e as suas implicações para a prática futura como professora.

6.1. Síntese do estudo

O presente estudo teve como base a intervenção letiva realizada no ano letivo de 2018/2019, ao longo de 13 aulas, na disciplina de Matemática, numa turma de 19 alunos do 9.º ano de escolaridade do Colégio Militar. Visou compreender como é que os alunos resolvem problemas com contextos de semi-realidade, no tema da Trigonometria. De forma a tingir este objetivo, foram elaboradas duas questões de investigação: (1) Que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas de trigonometria? e, (2) Que conhecimentos e que dificuldades evidenciam os alunos na resolução de problemas de trigonometria?

No decurso da unidade didática privilegiei uma abordagem de ensino exploratória, colocando o aluno no centro do processo de aprendizagem e, apesar de ser um estudo incidente na resolução de problemas, foram ainda propostos exercícios, tarefas de exploração e demonstrações, distribuídos pelas seis fichas de trabalho preparadas e por atividades do manual, nomeadamente aquelas que considerei serem mais relevantes para a aprendizagem dos alunos. De acordo com a abordagem optada, tentei que as aulas fossem dinamizadas tendo em conta três fases: (1) apresentação das tarefas; (2) momento de trabalho autónomo dos alunos; e (3) discussão em grupo-turma das tarefas realizadas. No momento de trabalho autónomo, os alunos trabalharam individualmente ou em grupos de dois ou três, tendo em conta o objetivo da aula e a duração da mesma.

O estudo seguiu uma metodologia qualitativa e interpretativa. A recolha dos dados foi feita através da observação direta, acompanhada de notas de campo e do registo vídeo das intervenções e áudio do par de alunos participantes do estudo, da recolha documental, contemplando as resoluções dos problemas realizados em sala de aula, e das resoluções dos instrumentos de avaliação: a ficha de avaliação sumativa e a questão-aula. Todos estes elementos foram reunidos para a concretização da análise dos dados.

6.2. Principais conclusões do estudo

6.2.1. Que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas de trigonometria?

Começo por referir que durante a intervenção fui constatando uma evolução na atitude dos alunos relativamente à resolução de problemas com contextos de semi-realidade. Desde o início reparei que estes não estavam familiarizados com este tipo de tarefas, e que demonstravam muito mais insegurança comparativamente à realização de exercícios.

Na resolução dos problemas analisados, as estratégias frequentemente utilizadas pelos dois alunos selecionados foram a *utilização de um esboço para representação do problema* e a *utilização de uma equação*.

A estratégia de *utilizar um esboço para representação do problema*, é considerada pelos alunos como facilitadora para a compreensão do problema, algo que é visível através do diálogo presente no problema do Padrão dos Descobrimentos (Figura 25), uma vez que os alunos afirmam que ao desenhar uma figura, o problema torna-se mais fácil de perceber. Aliada a esta estratégia surge o *assinalar os dados importantes do problema*, verificando-se que os alunos sublinham os dados que consideram relevantes ou transcrevem-nos para o caderno. Da análise de dados realizada posso verificar que a utilização destas duas estratégias está estreitamente relacionada com a fase da resolução do problema em que surgem, nomeadamente a fase de *Compreensão*, o que também se verificou no estudo de Jesus (2016).

Ainda nesta primeira fase da resolução do problema, verifica-se a utilização de uma outra estratégia pelos alunos, a de *focarem-se unicamente na figura*, e que surge neste estudo por uma adaptação de uma das estratégias referidas por Fan e Zhu (2007), a de *simplificar o problema.* Esta heurística é utilizada no problema do farol (Figura 29). De facto, os alunos simplificam o problema no sentido em que apenas consideram os dados presentes na figura. No entanto, o que os alunos realmente fazem é atender àquilo que é essencial para a resolução do problema. Ao ser verificado que os dados presentes na figura são os necessários, os alunos optam por deixar de lado a informação que é supérflua e que em nada contribui para a obtenção do resultado. Atendendo a isso, uma das principais consequências desta opção poderia conduzir a que, num momento posterior, a resposta não fosse dada de acordo com o contexto do problema. Contudo, da análise realizada, é possível constatar que os alunos resolvem o problema atendendo apenas aos dados matemáticos, mas que apesar disso, e após a obtenção do resultado, demonstram a capacidade de remeter esse mesmo resultado para o contexto do problema.

Relativamente a este último ponto, nos primeiros problemas analisados, constatou-se que os alunos na fase de *Verificação dos resultados*, não apresentaram uma resposta de acordo com o contexto do problema. Ao longo da intervenção, e em particular nos momentos de discussão dos problemas em grupo-turma, fui alertando para as diversas situações que deveriam ser melhoradas pelos alunos. A resposta ao problema, foi um dos alertas consecutivamente feito aos alunos. Nos últimos problemas, é possível verificar uma evolução dos alunos nesse sentido.

Em todos os problemas analisados, verifica-se a *utilização de uma equação* de forma a obter a resposta pretendida. A meu ver, os alunos ao realizarem sistematicamente o mesmo processo, demonstram uma fluência processual (Swan, 2017), na medida em que executam este procedimento matemático sem um esforço de raciocínio e de forma imediata.

Para além das principais estratégias já mencionadas, destacam-se ainda outras três, utilizadas nas fases de *Elaboração de um plano* e *Execução do plano*. Começo por destacar a estratégia de *resolver o problema por partes*, que surgiu no problema do farol (Figura 29). De todos os problemas analisados e que foram trabalhados em sala de aula, este foi o único que apresentava uma sugestão de resolução. Do que se pôde verificar, os alunos compartimentaram o problema, determinando primeiramente a medida de comprimento indicada na sugestão e só depois tentando perceber qual era o objetivo desse cálculo. Por outras palavras, conjetura-se que os alunos tendem a não estabelecer um plano para a totalidade da resolução do problema, mas que o vão fazendo à medida que sentem essa necessidade.

Por fim, as duas outras estratégias presentes neste estudo, têm em comum o facto de cada uma delas, ter sido utilizada de duas maneiras distintas. Relativamente à heurística *introduzir elementos auxiliares*, esta encontra-se presente em quatro dos problemas utilizados. Por um lado, esta estratégia foi utilizada para que fosse possível determinar uma dada medida. Querendo isto dizer que, só seria possível determinar a medida x, depois de previamente ter sido calculada a medida y. Por outro lado, é ainda utilizada pela necessidade dos alunos identificarem cada um dos lados do triângulo.

No que respeita à estratégia *pensar num problema relacionado*, constatou-se que esta foi utilizada de duas formas diferentes. Na sequência da análise do primeiro problema (Figura 21), os alunos verificam que a situação problemática é exatamente a mesma, diferindo de uma alínea para a outra, apenas a incógnita. Nesse sentido, o processo de resolução seria exatamente o mesmo. No problema da figura 29, o sentido da sua utilização é diferente do referido anteriormente. Neste caso, e tendo em conta que os alunos não estavam a ser capazes de escolher corretamente a razão trigonométrica a utilizar, recordaram o procedimento utilizado e recomendado num conjunto de problemas resolvidos anteriormente em contexto de sala de aula.

Na última fase da resolução de problemas, a de *verificação dos resultados*, não foram utilizadas quaisquer estratégias pelos alunos. Sobre este ponto, podemos ainda constatar que raramente é realizada uma reflexão sobre o resultado obtido. Neste estudo, apenas em um dos problemas analisados, se verificou que os alunos refletiram sobre o resultado que obtiveram, ainda que de forma deficitária. Considerando que em todos os problemas, era possível identificar uma situação de vida real, os alunos poderiam ter levantado algumas perguntas de forma a refletir sobre uma dada situação, nomeadamente: "Será que faz sentido este monumento ou edifício ter uma dada altura? Será este valor real?", entre outras. Desta forma, considero que, na maioria das ocasiões, os alunos não revelaram a competência crítica. Ainda que, tal como foi referido anteriormente, tenha existido uma evolução no facto de os alunos apresentarem, ou não, uma resposta de acordo com o contexto do problema.

Da análise realizada verificou-se que os alunos foram capazes de implementar uma estratégia quando interpretavam corretamente o problema ou quando este apresentava uma sugestão de resolução. Assim, a interpretação do enunciado do problema, assume um papel fundamental na sua resolução (Carvalho & Ponte, 2014).

Qualquer um dos problemas trabalhados exigiam uma resolução em mais do que um passo. Dado que os alunos demonstraram ser capazes de reconhecer e implementar uma ou mais estratégias de resolução em cada um dos problemas, considero que evidenciaram competência estratégica, na medida em que foram capazes de resolver problemas onde era necessário realizarem um ou mais passos. (Swan, 2017).

Resumindo, a análise de dados mostra que as estratégias mais utilizadas são aquelas que ajudam os alunos a identificar os dados do problema (Miranda, 2010) e a utilização de uma equação. Para além disso, verifica-se que os alunos optam por diversas estratégias e que estas parecem estar intimamente relacionadas com a fase de resolução em que surgem. Quero com isto dizer que a *utilização de um esboço para representação dos problemas* e o facto de os alunos *assinalarem os dados importantes do problema*, tende a surgir numa fase primordial da resolução da tarefa, enquanto que todas as outras estratégias acabam por surgir na fase de *execução* e/ou *implementação* do plano de resolução. Este resultado surge, igualmente no estudo de Jesus (2016).

Ainda no que diz respeito às duas estratégias com uma maior ocorrência, esta utilização poderá estar relacionada com o facto de os alunos considerarem que são facilitadoras do ponto de vista da compreensão do problema; o esboço, que os ajuda a identificar corretamente a situação; a equação, que funciona como um apoio à aplicação da definição das razões trigonométricas. Pode assim afirmar-se que, no que concerne a estas heurísticas, a atitude dos alunos foi sistemática ao longo de todos os problemas analisados. Relativamente às outras estratégias, existem evidências para afirmar que a utilização de *resolver o problema por etapas* está relacionada com o facto de o problema apresentar uma sugestão de resolução.

Um outro aspeto que importa referir, prende-se com o contexto dos problemas que foram analisados neste estudo. Todos remetiam para uma situação de realidade, porém, a presença de figuras com triângulos bem marcados que acabavam por ser o suporte para a atividade dos alunos, tornava-os um meio-termo entre problemas com contextos de realidade e problemas com contextos puramente matemáticos. Para além disso, a veracidade dos valores apresentados na situação, era na maioria das vezes, impossível de confirmar, pelo que se assumia serem fictícios. Em virtude disso, os problemas analisados neste estudo foram classificados como tendo por referência uma semi-realidade (Skovsmose, 2000).

Para finalizar, não posso deixar de referir a relevância que a primeira e a última aula da minha intervenção tiveram. Primeiro o facto de, no início da intervenção ter optado como ponto de partida, uma situação que fizesse parte da realidade dos alunos (Freudenthal, 1991 citado em Ponte & Quaresma, 2012). E em segundo, ter finalizado a intervenção tendo em conta esse mesmo ponto, com a oportunidade de os alunos resolverem um problema com um contexto real. Durante esta última aula, foi visível a envolvência dos alunos ao longo nas diversas etapas de resolução, procurando arranjar estratégias para o resolver e refletindo sobre o resultado obtido. Esta atividade demonstrou ser significativa para os alunos.

6.2.2. Que conhecimentos e que dificuldades evidenciam os alunos na resolução de problemas de trigonometria?

O Programa e Metas Curriculares de Matemática (MEC, 2013) definem os conhecimentos que devem ser adquiridos pelos alunos nos diversos tópicos de aprendizagem. No que respeita à Trigonometria e entre outros, os alunos deverão ser capazes de resolver problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas (MEC, 2013). Tendo em conta os dados analisados, considero que os alunos atingiram esse objetivo uma vez que foram capazes de implementar uma estratégia e de obter uma resposta correta a cada um dos problemas. Ainda no que concerne aos tópicos de Trigonometria, os alunos evidenciaram ter conhecimento e capacidade de implementar corretamente as definições das razões trigonométricas, ainda que na maioria das vezes, tenham surgido dúvidas nessa implementação. De forma a contornar essa situação, verificou-se que os alunos recorreram frequentemente a mnemónicas e aos seus resumos, de forma a ter sempre presente as definições, sendo que esta atitude revela um grau de autonomia bastante satisfatório. Tendo em conta os seus resultados nos momentos de avaliação, considero que houve uma evolução e os alunos foram capazes de colmatar esse défice.

Ao longo da resolução dos problemas, os alunos demonstraram ainda conhecimentos sobre a utilização da calculadora, quer para determinar os valores das razões trigonométricas, quer para, dado o valor da razão trigonométrica, determinar o valor aproximado da amplitude do ângulo respetivo. Observou-se também que os alunos preferiram usar a calculadora em detrimento da tabela dos valores trigonométricos. Num dos problemas, os alunos revelaram conhecimento sobre os valores exatos das amplitudes dos ângulos de referência, uma vez que não recorreram à calculadora para realizar esse cálculo, tendo recorrido à consulta dos seus registos, com intuito de verificar qual o resultado.

Para além dos conteúdos integrantes do tópico em estudo, os alunos revelaram conhecimento quanto à resolução de equações de 1.º e 2.º grau e do Teorema de Pitágoras.

Com a observação dos dados, gostaria ainda de dar destaque a um resultado que emergiu neste estudo, que relaciona o caminho e os conhecimentos mobilizados para a resolução do problema. Numa fase inicial, e num problema em que existia a possibilidade de resolver utilizando a trigonometria ou um conteúdo lecionado anteriormente, nomeadamente o Teorema de Pitágoras, os alunos escolheram o caminho em que foram utilizados os conhecimentos anteriores tal como se observou no estudo de Miranda (2010). No entanto, numa fase *à posteriori*, os alunos reconheceram que a utilização da trigonometria, revelava-se mais vantajosa comparativamente à aplicação do Teorema de Pitágoras.

Na resolução de problemas, e para além das dúvidas reveladas ao nível da definição das razões trigonométricas mencionadas anteriormente, as maiores dificuldades apresentadas pelos alunos não dizem respeito ao tópico em estudo, mas sim a outros abordados anteriormente, situação esta também observada nos estudos de Miranda (2010) e de Ferrage (2019). Ao longo de todos os problemas analisados e apenas com exceção do problema da ficha de avaliação sumativa, os alunos demonstraram dúvidas e/ou dificuldades ao nível dos arredondamentos e das casas decimais. Para além disso, existiram ainda algumas incoerências ao nível da matemática, mas que foram sendo corrigidas pelos alunos, ao longo das aulas. Por fim, é importante referir que o modo de trabalho dos alunos, a pares, teve um papel crucial no colmatar de todas estas dificuldades. A análise dos dados permitiu perceber a entreajuda e a forma como os alunos iam complementando ideias e conhecimentos entre eles. Desta forma, podemos concluir que o trabalho a pares foi bastante significativo no processo de aprendizagem destes dois alunos. Porém, da observação que realizei pude constatar que este tipo de trabalho não foi apreciado pela totalidade dos alunos da turma. Em algumas aulas e apesar dos alunos estarem sentados na mesma mesa, não havia qualquer interação entre eles. Para além disso, na aula que foi deixado ao critério dos alunos trabalhar ou não a pares, observei que alguns deles optaram por trabalhar individualmente.

6.3. Reflexão Final

No decorrer destes dois anos (e que longos anos), foram muitas as aprendizagens que contribuíram, de forma significativa, para enriquecer-me como pessoa e, principalmente, como futura professora. No entanto, foi neste último ano, que senti verdadeiramente as grandes dificuldades desta profissão.

A primeira grande dificuldade foi logo sentida ao realizar o planeamento da unidade didática. Um professor responsável por uma turma, sabe que ao longo do ano letivo tem determinados conteúdos para lecionar. Nesse sentido, pode ir fazendo o ajuste do tempo despendido em cada conteúdo, tendo em conta as dificuldades evidenciadas pelos alunos. Ao fazer a planificação apenas de um tópico, e sabendo à partida da quantidade de aulas disponíveis para o fazer, a meu ver, é um facto que condiciona e muito, o nosso papel. No final da maioria das aulas, sentia que estas tinham sido dadas sem que os alunos tivessem tido a oportunidade para refletir alguns dos aspetos, apesar de não evidenciarem isso nas suas resoluções.

Devido à inexperiência, toda esta planificação foi constantemente alterada. Por um lado, decidi que optaria por planear sempre mais tarefas do que aquelas que iriam ser possíveis de realizar. Com isto, pretendia que, ao ter sempre trabalho indicado, não houvesse tanta dispersão dos alunos. Por outro, a minha dificuldade na gestão do tempo, foi sempre algo visível e sem dúvida, um aspeto que com certeza irá melhorar com a experiência que for adquirindo.

Ainda relativamente à planificação desta unidade, e isto foi algo que senti ao longo destes dois anos de mestrado, a dificuldade em encontrar e/ou adaptar tarefas significativas do ponto de vista da aprendizagem dos alunos. Existem conteúdos com uma vasta seleção de tarefas, porém, como foi o caso da trigonometria ao nível do 9.º ano de escolaridade, estas tarefas são maioritariamente exercícios e problemas. Consequentemente, e ao querer implementar uma abordagem exploratória durante a nossa (minha e da minha colega de estágio) intervenção, todas estas tarefas tiveram de ser criadas e/ou adaptadas, fazendo com que muitas vezes realizasse uma aula, com base numa tarefa, que não tinha sido previamente testada. Uma consequência disso, mas não só, foi o facto de, por mais que o plano de aula fosse preparado minuciosamente, surgiam sempre dúvidas ou resoluções sobre as quais não tinha refletido.

Apesar de tudo isto, esta preparação e reflexão pré e pós aula, é sem dúvida uma das principais bagagens que levo comigo deste ciclo de estudos. Mesmo sabendo que, na maioria das vezes, as coisas não iriam correr como planeado, esta planificação dava-me confiança e segurança para cada aula lecionada. Sem dúvida que isso se repercutia no apoio que dava aos alunos, ajudando, mas tentando não alterar o objetivo pelo qual tinha selecionado uma dada tarefa.

Ao longo do Mestrado tive a oportunidade de contactar com conteúdos, metodologias e conceitos que, dada a sua importância e significado para mim, fiz questão que fizessem parte da minha intervenção, bem como do meu estudo. Começo por salientar a metodologia de ensino exploratório. Enquanto aluna, sempre tive professores com um método maioritariamente expositivo e muitas vezes sentia que, os professores somente olhavam para as nossas produções, quando efetivamente corrigiam os instrumentos de avaliação. Nesse sentido, considero que o ensino-aprendizagem é mais significativo para os alunos, quando estes assumem uma figura de destaque nesse processo. Outra das metodologias adotadas foi a proposta de uma diversidade de tarefas. Apesar do meu estudo ter tido como base a resolução de problemas, é de extrema relevância que os alunos contactem com a maior diversidade de tarefas possível, uma vez que, cada uma delas tem um objetivo de aprendizagem diferente. Como professora, espero ser capaz de perceber em que circunstâncias deverá ser usada cada uma delas. Por fim, destaco a utilização de tecnologia em sala de aula. Apesar de ter sido uma das aulas mais complicadas de planificar e que teve como base uma ficha de trabalho criada de raiz, foi sem dúvida, uma das mais marcantes. A perceção que tive no final da mesma, é que a tecnologia tinha tido um papel crucial na aprendizagem dos alunos. Foi possível observar situações em que resolver, com lápis e papel, seria muito mais complexo e provavelmente impraticável. Considero que, estes três aspetos, farão parte da minha caminhada enquanto professora.

No que respeita à minha função enquanto investigadora, foram meses e meses de aprendizagem. Desde o processo de seleção de tarefas, a escolha dos participantes, da recolha de dados e da análise dos mesmos, foram todos momentos recheados de incertezas e dificuldades. O medo de não conseguir dar resposta ao meu objetivo era constante.

Dificuldades à parte, considero que o tema do meu estudo foi muito importante para mim enquanto professora. Foi interessante perceber todo o percurso que determinado aluno realiza desde o momento em que é-lhe entregue a tarefa até obter a resposta final. Olhando apenas para a resolução final, não é possível descortinar praticamente nada daquilo que os alunos vivenciaram ao longo desse processo. Nesse sentido, considero importante que o aluno, ao apresentar a sua resolução, seja incentivado a explicar todas as suas etapas de resolução.

Para além de tudo isto, não poderia deixar de destacar a importância que teve a relação pedagógica e o conhecimento da turma com quem estamos a trabalhar. Neste sentido, destaco o quão vantajoso foi acompanhar a turma desde o início do ano letivo, não só pelo facto da professora cooperante ir relatando alguns aspetos particulares da turma, mas também por, desde início, os alunos me terem visto como professora e como alguém disposto a ajudar no seu desenvolvimento. Considero ainda, que o professor deverá ser capaz de utilizar esse conhecimento de forma a adaptar o tipo de ensino para cada turma e/ou alunos. Uma das dificuldades que senti relativamente à turma, foi a fraca participação dos alunos durante as aulas. Poucos eram os alunos que manifestavam interesse em participar quer oralmente, quer nas idas ao quadro. Em algumas vezes, considero que isso foi um entrave ao desenvolvimento das aulas. Com o passar do tempo fui arranjando formas de contornar esta situação, considerando que, a turma com que finalizei a minha intervenção estava diferente daquela com que iniciei.

Por fim, considero que, como futura professora, apesar de tudo aquilo que aprendi, nunca saberei tudo. Como consequência disso, tenho consciência que apostar na constante formação é algo extremamente necessário e importante em qualquer profissão, principalmente nesta que eu escolhi.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só) …. *Educação e matemática*, *8*, 7-10 e 35.

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* (1ª edição). Universidade Aberta.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico - Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17 (2),* 125-141.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática.* Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Universidade de São Paulo.

Brito, L. (2008). Ler e resolver Problemas. *Educação e Matemática*, *99*, 40 – 44

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e Desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática*, 271-233. Lisboa: IEUL

Cargnin, C., Cardoso, F. A. R., Melo, P. A. P. & Polizeli, R. (2015). Um olhar para a trigonometria: da escola para as ruas. Maringá: Massoni.

Carvalho, R. & Ponte, J. P. (2014). O papel das tarefas no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática*, 31-54. Lisboa: IEUL

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education.* New York, NY: Routledge.

Colégio Militar. (2019). *Projeto Educativo.* Retirado em agosto, 3, 2019, de https://www.colegiomilitar.pt/documentos-estruturantes/projeto-educativo/

Creswell, J. W. (2007). *Projeto de pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto.* Porto Alegre: Artmed.

Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2010). Teachers's metacognitive and heuristic approaches to work problem solving: analysis and impact on students' beliefs and performance. *ZDM Mathematics Education*, *42*, 205-218. Doi: 10.1007/s11858-009-0221-5

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 61-75. doi 10.1007/s10649-006-9069-6

Fernandes, J. A., Carvalho, C. F. D., & Ribeiro, S. A. (2007). Caracterização e implementação de tarefas de Estatística: um exemplo no 7. º ano de escolaridade. *Revista Zetetiké*, *15* (28), 27-61.

Ferrage, D. T. (2019). *A Aprendizagem da Trigonometria no 9.º ano de escolaridade através da diversidade de tarefas* (Relatório de Prática de Ensino Supervisionada). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Groenwald, C. L. O., Sauer, L. O. & Franke, R. F. (2005). A história da matemática como recurso didático para o ensino da teoria dos números e a aprendizagem da matemática no ensino básico. *PARADIGMA*, *XXVI*(2), 01-15.

Guimarães, H. M. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática — Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. In L. Santos, A. P. Canavarro e J. Brocardo (Org.), *Educação e Matemática: caminhos e encruzilhadas — Actas do encontro de homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 145-166). Lisboa: APM.

Guimarães, H. M. (2014). O ensino por meio de problemas. *Educação e Matemática*, *130*, 44-50.

Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop*. Columbus: ERIC/SMEAC.

IEUL (2016). *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Diário da República, 2.ª série - N.º 52 – 15, de março de 2016.

Jesus, N. D. (2016). *Resolução de problemas com a função afim em diferentes contextos* (Relatório de Prática de Ensino Supervisionada). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Junior, C. S. (2006). *Um estudo exploratório sobre o uso da informática na resolução de problemas trigonométricos.* (dissertação de mestrado). UNESP. Brasil.

Juri Nacional de Exames. (2019). Obtido de Direção-Geral da Educação: http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/JNE/eneb_hmlg2019_f1_medias.pdf

Kantowski, M. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal of Research in Mathematics Education, 8 (3),* 163-180.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Resolução de Problemas.* Coligido por Lurdes Serrazina. Texto mimeo.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lester, F. (1980). Problem solving: is it a problem?. In M. M. Lindquist (Ed.), *Selected issues in mathematics education* (pp. 29-45). Reston: NCTM.

Lopes, M. M. (2011). Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de Trigonometria. Retirado em junho, 19, 2019, de*: www. cimm. ucr. ac. cr/ocs/index. php/xiii ciaem/xiii ciaem/.../801.*

Magro, F., Fidalgo, F. & Louçano, P. (2015). *Pi-9.º Ano*. Lisboa: Edições ASA

Mendes, M. M. N. F. (2016). *Aprendizagem de trigonometria de alunos de 9.º ano de escolaridade com recurso ao Geogebra* (Relatório de Estágio). Universidade do Minho, Braga.

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais – 9.º ano.* Lisboa: Ministério da Ciência.

Ministério da Educação (ME). (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: MEC.

Miranda, C. J. V. (2010). *A Aprendizagem da Trigonometria do Triângulo Rectângulo através da Resolução de Problemas* (Relatório de Prática de Ensino Supervisionada). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Nascimento, A. Z. (2005). *Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica* (dissertação de mestrado). PUC-SP. São Paulo.

NCTM. (1980). *Problem solving in school mathematics.* Virginia: NCTM.

NCTM (1999). *Normas para a avaliação em Matemática.* Lisboa: APM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (3ªedição). Lisboa: APM.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nogueira, D. M. M. (2013). *Tópicos da história da trigonometria* (dissertação de mestrado). Universidade de Aveiro.

Nunes, F. (1996). *O ensino da Matemática e o trabalho de grupo: dois estudos de caso* (Dissertação de mestrado). Lisboa: APM.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29-53.

Oliveira, J. E. M. (2013). *A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas* (dissertação de mestrado). Universidade Federal de Viçosa.

Oliveira, H. & Borralho, A. (2014). As tarefas e a aprendizagem dos alunos. In Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (pp. 149-156). Sesimbra: SPIEM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, *2*, 95-108.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Eds.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. D., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, 55-81.

Ponte, J. P. D., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, *22*(8), 196-216.

Ponte, J. P. D., & Serrazina, M. D. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1. º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM

Ponte, J., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: DES do ME.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. *Actas EIEM 2008* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Santos, L. & Pinto, J. (2018). Ensino de Conteúdos Escolares: A Avaliação como fator estruturante. In Veiga, F. H. (Coord.). *O Ensino na Escola de Hoje: Teoria, Investigação e Aplicação* (pp. 503-539). Lisboa: Climepsi Editora.

Santos, V. I. O. (2012). *Resolução de problemas envolvendo Sistemas de Equações de 1.º grau a duas incógnitas – um estudo com alunos do 8.º ano* (Relatório de Prática de Ensino Supervisionada). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?. In P. Abrantes, L. Leal & J. Ponte (Eds.). *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.

Schukajlow, S., Kolter, J. & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM Mathematics Education, 47*, 1241-1254. Doi: 10.1007/s11858-015-0707-2

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, *14*, 66-91

Swan, M. (2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, *144*, 67-72.

Teong, S. K., Hedberg, J. G., Ho, K. F., Lioe, L. T., Tiong, J. Y. S., Wong, K. Y., & Fang, Y. (2009). *Developing the repertoire of heuristics for mathematical problem solving, project 1: Establishing baseline data for mathematical problem solving practices in Singapore schools*.

Vale, I., Pimentel, T. & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante, XXIV(2), 39-60.*

ANEXOS

Anexo 1 – Significado das notações utilizadas.

Notação	Significado
$\boldsymbol{AB}$	reta que contém os pontos A e B.
$\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$	semirreta com origem em A e que passa por B.
$[\boldsymbol{AB}]$	segmento de reta de extremos A e B.
$\overline{\boldsymbol{AB}}$	comprimento do segmento de reta $[AB]$
$[\boldsymbol{ABC}]$	triângulo de vértices A, B e C.
$\measuredangle \boldsymbol{BAC}$	ângulo compreendido entre as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$.
$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$	amplitude do ângulo α.
$\boldsymbol{\alpha \equiv \beta}$	o ângulo α é congruente com o ângulo β, ou seja, têm a mesma amplitude ($\hat{\alpha} = \hat{\beta}$).
$\approx$	aproximadamente igual.

Anexo 2 – Ficha de trabalho nº 10: Semelhança de triângulos.

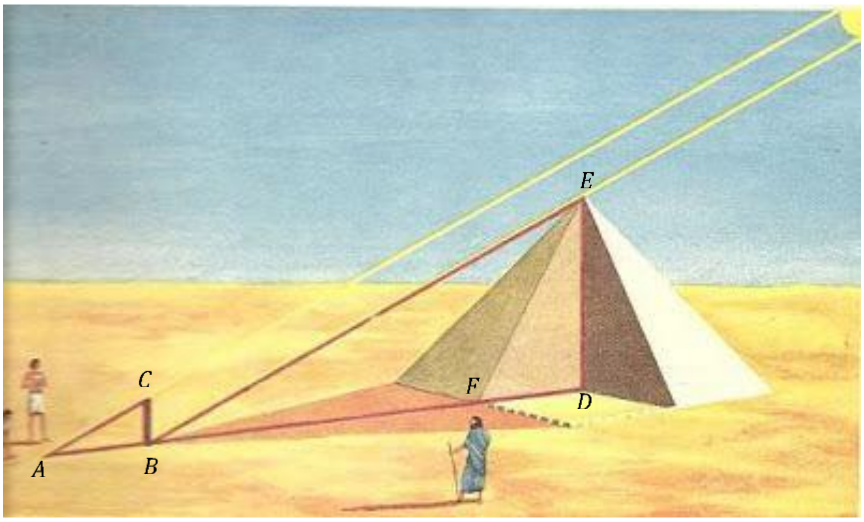
ANO LETIVO 2018/2019 Fevereiro 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 10** Assunto: Semelhança de triângulos **NOME:** ______________________________ **N.º** ______**TURMA:**_____

MOTIVAÇÃO

Segundo se diz, foi Tales de Mileto (646-546 a.C.) quem primeiro calculou a altura das pirâmides do Egipto, utilizando o método da sombra, ou seja, fixou uma estaca, **perpendicularmente ao chão**, perto de uma das pirâmides e mediu o comprimento da sombra da estaca nesse preciso momento. Assim, os raios solares formam com a estaca e sua sombra um triângulo, tal e qual como a pirâmide e a sua sombra.

Da física sabemos que quando o Sol incide num determinado local numa hora específica do dia, o seu ângulo de incidência é igual para todos os objetos desse local, nessa hora.

Observa a figura abaixo, constituída por dois triângulos $[ABC]$ e $[BDE]$, onde se ilustra a situação.

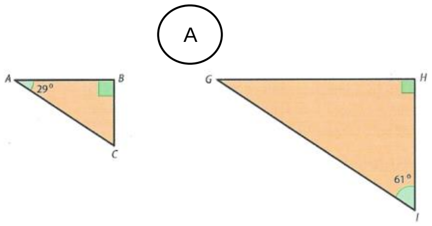


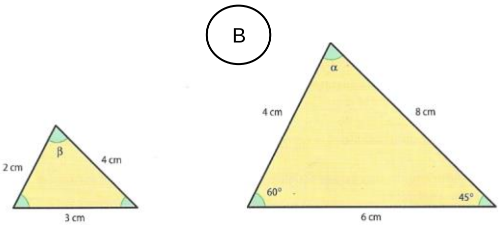
Sabe-se que:

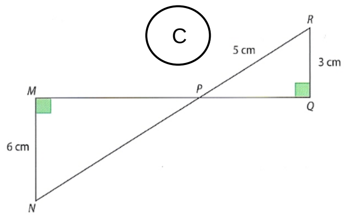
- $\overline{BC} = 2m$; $\overline{AB} = 6m$; $\overline{BF} = 329m$; $\overline{FD} = 115m$;
- $B\hat{A}C \equiv D\hat{B}E$.

Qual é a altura da pirâmide? Apresenta todos os cálculos e justificações que achares necessários.

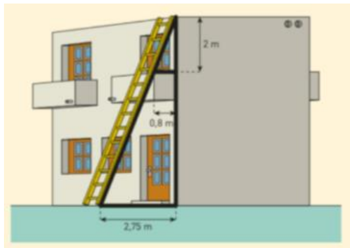
1. Mostra que os seguintes pares de triângulos são semelhantes:



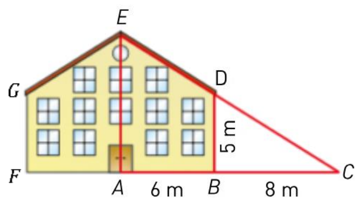




2. Atendendo aos dados da figura determina a altura da seguinte casa, apresentando o resultado, em metros, arredondado às décimas.



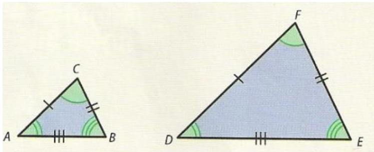
3. (TPC) Na figura está representada a frente de uma casa $[FGEDB]$, sendo AE um eixo de simetria. Atendendo aos dados da figura, determina, em metros quadrados, a área da frente da casa.



Anexo 2.1 – Ficha informativa: Critérios de semelhança de triângulos.

A RECORDAR…

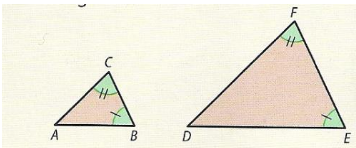
Dois triângulos são **semelhantes** se e só se os ângulos correspondentes são geometricamente iguais e os comprimentos dos lados correspondestes proporcionais.



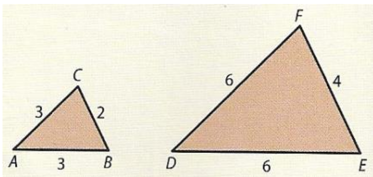
Notação	Ângulos geometricamente iguais	Lados correspondentes
$[ABC]\sim[DFE]$ ↓ é semelhante a…	$\hat{A} \equiv \hat{D}$ $\hat{C} \equiv \hat{F}$ $\hat{B} \equiv \hat{E}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DE}}$

Contudo, para verificar se dois triângulos são semelhantes, não é necessário comparar os três lados e os três ângulos dos dois triângulos. Basta utilizar um dos critérios seguintes:

- **Critério Ângulo-Ângulo (critério AA)**
  Dois triângulos são semelhantes se têm dois ângulos geometricamente iguais.

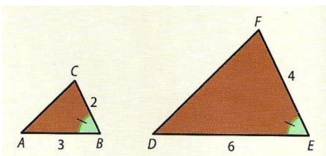


- **Critério Lado-Lado-Lado (critério LLL)**
  Dois triângulos são semelhantes se têm os três lados proporcionais.



- **Critério Lado-Ângulo-Lado (critério LAL)**

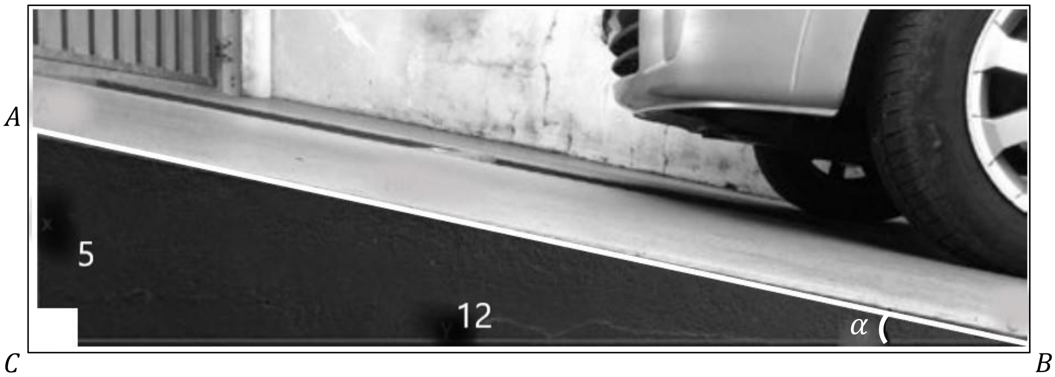
  Dois triângulos são semelhantes se têm dois lados proporcionais e os ângulos por eles formados geometricamente iguais.



Anexo 3 – Ficha de trabalho nº 11: Razões trigonométricas.

ANO LETIVO **2018/2019** Fevereiro 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 11** Assunto: Razões Trigonométricas **NOME:** ______________________________ **N.º** ______**TURMA:**____

1. Considera a seguinte imagem, onde está representado o triângulo $[ABC]$:



a) Efetua os seguintes quocientes:

i. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$; ii. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$; iii. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

b) O que representam:

i. $\overline{AC}$ em relação ao ângulo α no triângulo $[ABC]$;

ii. $\overline{BC}$ em relação ao ângulo α nos triângulos $[ABC]$;

iii. $\overline{AB}$ em relação ao triângulo $[ABC]$.

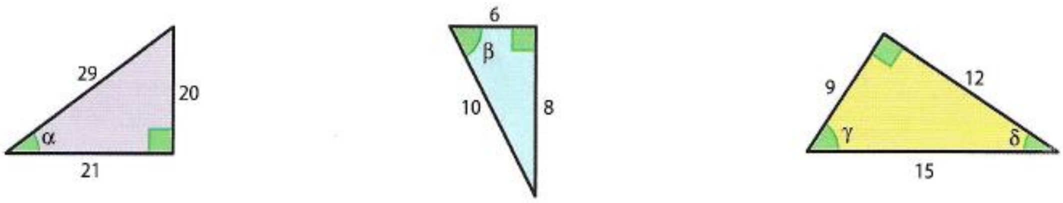
c) Tendo em conta o triângulo $[ABC]$ e as duas últimas questões, completa:

i. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\qquad\qquad}{hipotenusa} =$

ii. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} =$

iii. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} =$

1. Na figura estão representados três triângulos retângulos.



Atendendo aos dados das figuras, determina os valores de:

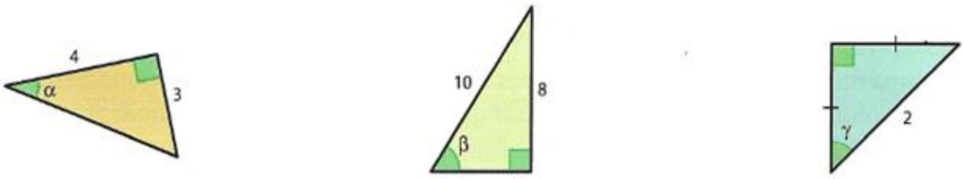
a) $sen\alpha, cos\alpha$ e $tg\alpha$

b) $sen\beta, cos\beta$ e $tg\beta$

c) $sen\gamma, cos\gamma$ e $tg\gamma$

d) $sen\delta, cos\delta$ e $tg\delta$

2. Observa as figuras.



Atendendo às medidas indicadas, determina os valores de:

a) $sen\alpha, cos\alpha$ e $tg\alpha$

b) $sen\beta, cos\beta$ e $tg\beta$

c) $sen\gamma, cos\gamma$ e $tg\gamma$

Anexo 4 – Ficha de trabalho nº 12: Invariância de razões trigonométricas.

ANO LETIVO **2018/2019** Fevereiro 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 12** Assunto: Invariância nas razões trigonométricas **NOME:** ______________________________ **N.º** ______**TURMA:**____

Para realizares esta ficha, utiliza o tablet e o ficheiro do GeoGebra que te foi disponibilizado.

1. Utilizando as potencialidades do programa e depois de escolheres dimensões para o teu triângulo, identifica:
   1.1. O valor do ângulo $B\hat{A}C$.
   1.2. As razões trigonométricas:
      1.2.1. $sen\ \alpha$ 1.2.2. $cos\ \alpha$ 1.2.3. $tg\ \alpha$

2. Movimenta, agora, o ponto C. Repara que obténs novos triângulos retângulos.
   2.1. Compara o valor do ângulo $B\hat{A}C$ com o valor que registaste na pergunta 1.1. O que verificas?

   2.2. O que parece acontecer aos valores das razões trigonométricas?

   2.3. O valor encontrado para cada razão depende das medidas dos ângulos dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

3. Agora, movimentando o ponto B, responde às seguintes perguntas:
   3.1. Compara o valor do ângulo $B\hat{A}C$ com o valor que registaste na pergunta 1.1. O que verificas?

   3.2. Os triângulos obtidos são semelhantes ao inicialmente construído? Explica o teu raciocínio.

   3.3. Compara os valores das razões trigonométricas obtidas em 1.2. com os valores obtidos após a movimentação do ponto B. O que verificas?

   3.4. O valor encontrado para cada razão depende das medidas dos lados dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

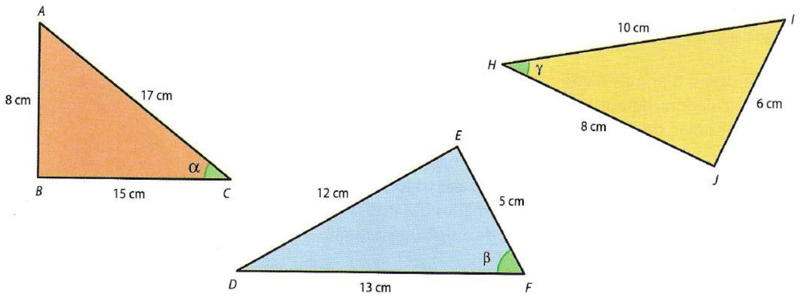
4. Agora, movimentando qualquer um dos pontos do triângulo, responde às seguintes perguntas:
   4.1. Consegues apresentar uma situação em que o $sen\ \alpha$ seja negativo? E que tome o valor 1,5? Justifica.

   4.2. Entre que valores pode estar o $sen\ \alpha$? E o $cos\ \alpha$?

Anexo 5 – Ficha de trabalho nº 13: Relações entre razões trigonométricas.

ANO LETIVO **2018/2019** Março 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 13** Assunto: Relações entre as razões trigonométricas **NOME:** ______________________________ **N.º** ______**TURMA:** ____

Na figura seguinte estão representados três triângulos e os comprimentos dos seus lados.



a) Prova que os triângulos da figura são retângulos.

b) Determina as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de cada um dos ângulos assinalados na figura. Compara o valor da razão tangente com o quociente entre as razões seno e cosseno de cada ângulo. O que verificas?

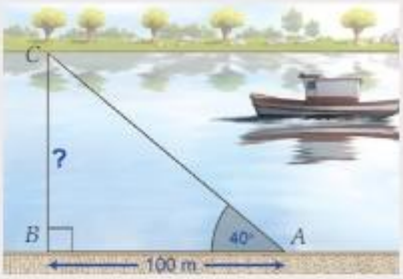
c) Determina o valor de $(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2$. Realiza o mesmo para os restantes ângulos (α e β). O que verificas?

d) Será que aquilo que observaste funciona para qualquer triângulo? Realiza a atividade 29 da página 55 do manual.

Anexo 6 – Determinar distâncias a locais inacessíveis.

14 Atividade — **Resolver problemas**

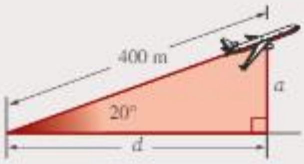
14.1 Atendendo aos dados da figura, calcula um valor arredondado às unidades da largura do rio no local assinalado.



14.2 Quando o avião que vês na figura levanta voo, faz um ângulo de $20°$ com a linha do solo. Em 5 segundos percorre 400 metros.

a) Que altura atinge ao fim deste tempo? Apresenta o resultado arredondado às décimas.

b) Qual é o valor, arredondado às décimas, da distância d?

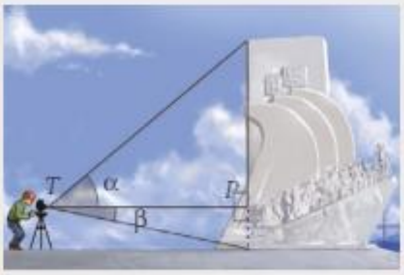


14.3 Depois de teres determinado a altura a, recorrendo à trigonometria, também podes determinar d pelo teorema de Pitágoras. Experimenta.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

14.4 Qual é a altura do Padrão dos Descobrimentos?

A figura representa o Padrão dos Descobrimentos, em Lisboa.



Foi necessário medir a sua altura. Para isso, utilizou-se um teodolito. Registaram-se as medidas seguintes, de acordo com o esquema da figura:

$$\alpha = 39°; \quad \beta = 9° \quad \text{e} \quad \overline{PT} = 60\text{ m}$$

Determina a altura do Padrão, com aproximação às centésimas.

Adaptado de Exame Nacional

14.5 Qual é a altura do edifício?

Para medir a altura do edifício utilizou-se um teodolito.

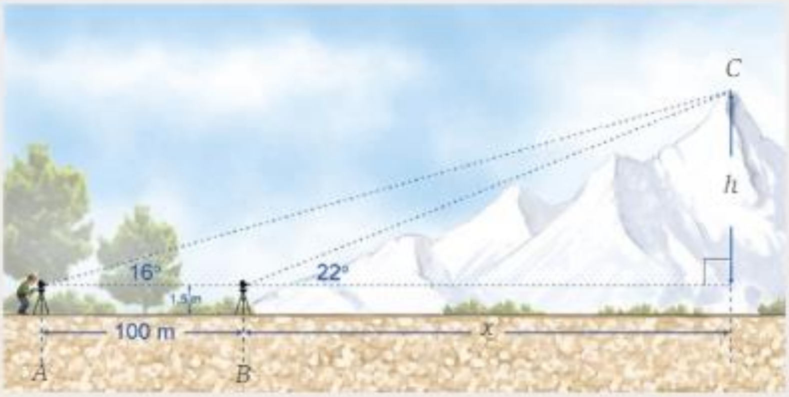
Registaram-se as medidas seguintes, conforme o esquema da figura.

- $\alpha = 16{,}5°$
- $\beta = 58{,}8°$
- Distância do edifício ao teodolito: 212 dm

Qual é a altura aproximada do edifício?

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

14.6 Como medir a altura de uma montanha quando não se tem acesso à sua base?



Para medir a altura do cume C da montanha representada na figura, um topógrafo escolheu dois pontos A e B, do mesmo plano horizontal.

Com um teodolito, mediu os ângulos de elevação em A e B.

Atendendo aos dados da figura, e tomando valores arredondados às milésimas para as razões trigonométricas, calcula:

a) a altura da montanha relativamente ao nível do solo.

b) a altura da montanha em relação ao nível do mar, sabendo que os pontos A e B estão a 700 metros de altitude.

Anexo 7 – Ficha de trabalho nº 14: Resolução de problemas.

ANO LETIVO **2018/2019** Março 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 14** Assunto: Resolução de problemas **NOME:** ________________________________ **N.º** ______**TURMA:** ____

1. A figura ao lado é uma fotografia do farol do Cabo de Santa Maria, situado na Ria Formosa, na Ilha de Culatra.

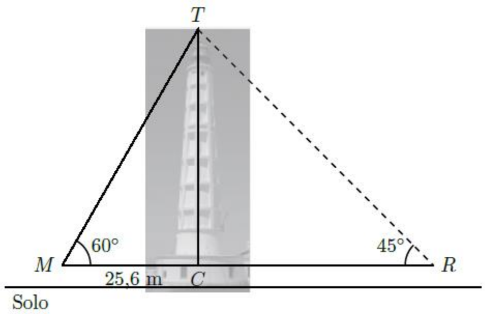
A Marta e o Rui estão a fazer um trabalho de trigonometria.

A Marta colocou-se num ponto a partir do qual podia observar o topo do farol segundo um ângulo de amplitude de $60°$. Fez algumas medições e esboçou um esquema idêntico ao que se apresenta na figura seguinte.

Nesse esquema, o ponto T corresponde ao topo do farol, o ponto M corresponde ao ponto de observação da Marta, e o ponto R corresponde ao ponto de observação do Rui.

Relativamente ao esquema da figura ao lado (que não está desenhada à escala), sabe-se que:

- $[MCT]$ é um triângulo retângulo;
- O ponto R pertence à semirreta $\dot{M}C$;
- $T\hat{M}C = 60°$ e $T\hat{R}C = 45°$;
- $\overline{MC} = 25{,}6\ m$



Determina $\overline{MR}$, ou seja, determina a distância entre a Marta e o Rui. Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades.[1]

Sugestão: Começa por determinar $\overline{TC}$.

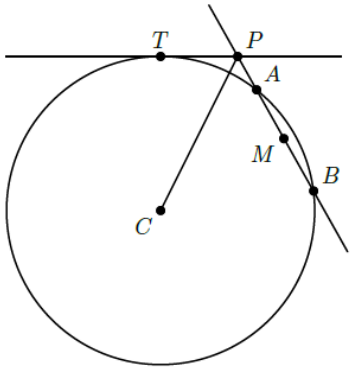
Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, 1ª fase

[1] Solução: $\overline{MR} \approx 70\ metros$

1. Na figura ao lado, estão representados uma circunferência de centro no ponto C e os pontos T, P, A, M e B.
A figura não está desenhada à escala.
Sabe-se que:

- Os pontos T, A e B pertencem à circunferência;
- M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$
- A reta tangente à circunferência no ponto T interseta a reta AB no ponto P.
- $\overline{PB} = 8$
- $\overline{PA} = 2$
- $\overline{PT} = 4$
- $\overline{CT} = 9{,}2$



Determina a amplitude do ângulo BCM.[1]
Na tua resposta, deves:

– Obter $\overline{BM}$
– Indicar o valor de $\overline{CB}$
– Apresentar a amplitude do ângulo BCM, em graus, arredondada às unidades.

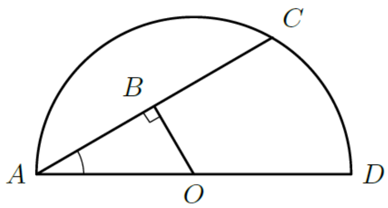
Apresenta todos os cálculos que efetuares.
Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, Época Especial

[1] Solução: $B\hat{C}M \approx 19°$

Na figura seguinte, está representada uma semicircunferência de centro no ponto O e diâmetro $[AD]$.
Sabe-se que:

- O ponto C pertence à semicircunferência;
- O ponto B pertence ao segmento de reta $[AC]$;
- O triângulo $[ABO]$ é retângulo em B;
- $\overline{OB} = 1\ cm$;
- $B\hat{A}O = 25°$



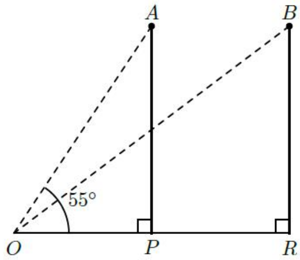
Determina a área do semicírculo de diâmetro $[AD]$.[1]
Apresenta o resultado em centímetros quadrados, arredondado às décimas.
Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo três casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, 2ª fase

[1] Solução: $A_S = 8{,}8\ cm^2$

Em São Torpes, no concelho de Sines, encontra-se uma central termoelétrica com duas chaminés.

A figura da esquerda é uma fotografia dessa central termoelétrica e a figura da direta é uma representação das duas chaminés.



Na figura da direita, os segmentos de reta $[AP]$ e $[BR]$ correspondem às duas chaminés. O ponto O corresponde a uma posição a partir da qual se observa o topo da chaminé representada por $[AP]$ segundo um ângulo com $55°$ de amplitude.

Ambas as chaminés têm 225 $metros$ de altura e a distância entre elas é igual a 132 metros.

Assim, relativamente à figura da direita (que não está desenhada à escala), sabe-se que:

- O ponto P pertence ao segmento de reta $[OR]$;
- $A\hat{O}P = 55°$;
- $\overline{AP} = \overline{BR} = 225\ m$
- $\overline{PR} = 132\ m$

Determina a amplitude do ângulo BOR.[1]

Sugestão: Começa por determinar $\overline{OP}$.

Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades.

Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo duas casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, Época Especial

[1] Solução: $B\hat{O}R \approx 38°$

Anexo 8 – Ficha de trabalho nº 15: Resolução de problemas na Trigonometria.

COLÉGIO MILITAR

Matemática- 9º Ano

Ficha de trabalho n.º 15

Colégio Militar

ANO LETIVO

2018/2019
Março 2019

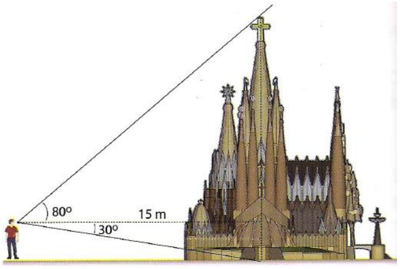
Assunto: Resolução de Problemas na Trigonometria

NOME: ________________________________ **N.º** ______**TURMA:**_____

1. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que α é um ângulo agudo, determina o valor exato de:

   a) $1 + tg^2\alpha$ b) $2sen\,\alpha - tg\,\alpha$

2. O Templo Expiatório da Sagrada Família de Barcelona começou a ser construído a 19 de março de 1882 e ainda hoje se encontra inacabado. Aquando da sua visita a Barcelona, o Pedro ficou impressionado com a arquitetura desta obra da autoria do catalão Antoni Gaudí. Atendendo aos dados da figura, determina a altura (em metros), com aproximação às unidades, da torre da catedral que se encontra em destaque no esquema ao lado.



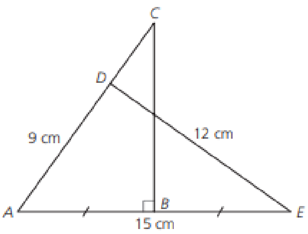
3. Sobre a figura ao lado (que não está desenhada à escala), sabe-se que:
   - $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B;
   - B é o ponto médio do segmento de reta $[AE]$;
   - $\overline{AD} = 9\ cm$, $\overline{DE} = 12\ cm$ e $\overline{AE} = 15\ cm$.

   a) Prova que $[ADE]$ é retângulo em D.

   b) Justifica que $\cos\hat{A} = sen\,\hat{E}$.

   c) Determina, com a aproximação às décimas, a amplitude do ângulo A.

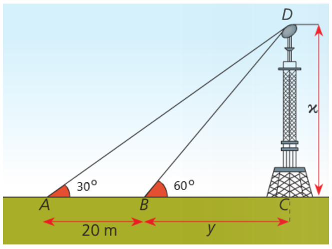
   d) Determina, com a aproximação às milésicas, $\overline{DC}$.



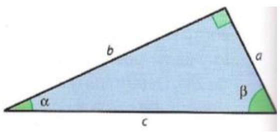
4. O funcionamento de um telemóvel é baseado numa comunicação em dois sentidos entre o aparelho e uma antena colocada no topo de uma estação base.

   Para determinar a altura (x) de uma estação base, o Jaime mediu a amplitude de dois ângulos em dois pontos, A e B, que distam 20 $metros$ entre si.

   Determina a altura da estação base com aproximação às décimas. Nos cálculos intermédios utiliza sempre os valores exatos.



5. Na figura está representado um triângulo retângulo, em que a, b e c designam, respetivamente, as medidas dos catetos e da hipotenusa. Prova que o valor de $cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta$ é 1.

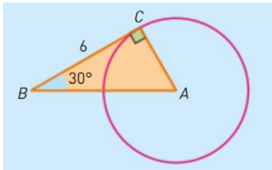


1

Soluções: 1a) 2; 1b) $\sqrt{2} + 1$; 2) $\approx 94\ m$; 3c) $\approx 53{,}1°$; 3d) $3{,}500\ cm$; 4) $\approx 17{,}3\ m$; 6) $\approx 890{,}7\ m$; 7) $\approx 21{,}77\ u.c.$; 9) $\approx 19\ m$; 10a) 72°; 10b) $\approx 5{,}9\ cm$; 10c) $\approx 59{,}4\ cm^2$

6 Durante uma prova de orientação, os participantes partem de um ponto B e percorrem um trajeto em forma de triângulo, $[ABD]$, conforme se pode ver no mapa que se segue. Qual é a distância percorrida nesse trajeto triangular com aproximação às décimas.

7 Na figura está representada uma circunferência de centro A e que passa por C. Sabe-se ainda que $A\hat{B}C = 30°$ e $\overline{BC} = 6$. Determina o perímetro da circunferência. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.



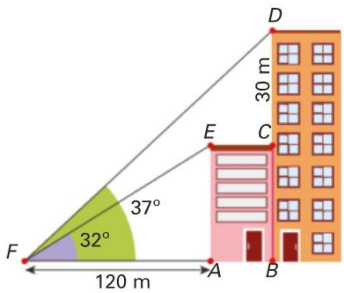
8 Para qualquer ângulo agudo de amplitude α, prova que é válida a relação seguinte:

$$\frac{sen\alpha \times cos\alpha}{tg\alpha} + sen^2\alpha = 1$$

9 Dois prédios contíguos têm alturas diferentes, como observamos na figura ao lado.

Sabe-se que:

- $[ABCE]$ é um retângulo;
- $[DB] \perp [EC]$
- $\overline{AF} = 120\ m$
- $A\hat{F}E = 32°$
- $B\hat{F}D = 37°$
- $\overline{CD} = 30\ m$



De acordo com os dados da figura, determina $\overline{EC}$.

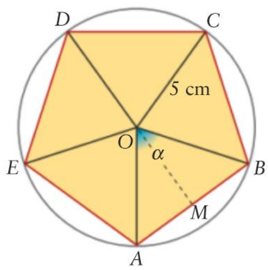
Apresenta a resposta em metros, arredondada às unidades.

10 Na figura ao lado está representado um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro O e raio $5\ cm$.

a) Qual é a amplitude do ângulo AOB?

b) $[OM]$ é a altura do triângulo $[ABO]$ relativamente à base $[AB]$.
Determina a medida do lado do pentágono regular.
Apresenta o resultado com uma casa decimal.

c) Qual é a área do pentágono regular?
Nos cálculos intermédios utiliza quatro casas decimais
Apresenta o resultado com aproximação às décimas.



Anexo 9 – Ficha de Avaliação Sumativa.

ANO LETIVO 2018/19 DATA **25.mar. 2019**	**COLÉGIO** **MATEMÁTICA – 9º** **TESTE nº 6 – 90 minutos** **NOME:**_______________________________________; **TURMA** _____; **Nº** ______	**Professoras:** *Anabela Anunciada* *Anabela Candeias*

1. Num triângulo retângulo em que α é um ângulo agudo, qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $sen\ \alpha = -0{,}2$ (B) $tg\ \alpha = 1{,}5$ (C) $\cos\alpha = 2$ (D) $sen\ \alpha = 1$

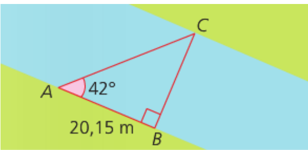
2. Resolve a inequação seguinte:

$$\frac{2(1-x)}{3} < \frac{1}{2}x + 2$$

Apresenta o conjunto solução na forma de um intervalo de números reais.
Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Prova Final 3.º Ciclo – 2018, 1ª fase

3. Na figura está representado um rio e as suas margens. Sabendo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B e que $\overline{AB} = 20{,}15\ m$ e $C\hat{A}B = 42°$, determina, com aproximação às centésimas, $\overline{BC}$, ou seja, a largura do rio.



4. Seja $A =]-1{,}2[$ e seja $B =]-3{,}0[$. Em qual das opções seguintes está representado o conjunto $A \cup B$?

(A) $\{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x < 0\}$ (B) $\{x \in \mathbb{R}: x > -3 \wedge x < 0\}$

(C) $\{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x < 2\}$ (D) $\{x \in \mathbb{R}: x > -3 \wedge x < 2\}$

Teste Intermédio 9.º ano – 07.02.2011

5. Considera os conjuntos A, B e C.

$B =]-3,0[$ $\qquad C = \{x \in \mathrm{IR} : -2 \le x \le 2\}$

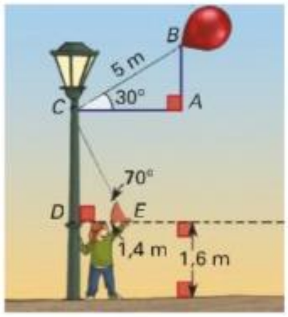
Determina na reta real e na forma de intervalo de números reais:

5.1. $A \cup B$ **5.2.** $A \cap C$

6. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e que α é um ângulo agudo, determina o valor exato simplificado de:

$$\sin\alpha - 2tg\alpha$$

7. A Maria estava a brincar com um balão e este ficou preso num poste. Observa a figura seguinte, onde se verifica que:



$[ABC]$ é triângulo retângulo em A;

$[CDE]$ é triângulo retângulo em D;

$[AC]$ é paralelo a $[DE]$

$\overline{CB} = 5\ m$ e $\overline{DE} = 1{,}4\ m$;

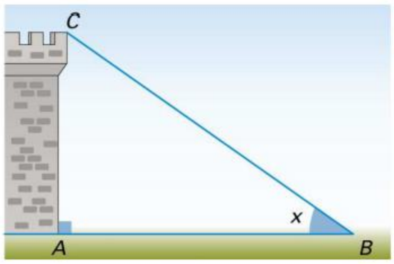
$C\hat{E}D = 70°$ e $A\hat{C}B = 30°$

A Maria tem $1{,}6\ metros$ de altura.

Determina a distância do balão, no ponto B, ao solo.

Apresenta a resposta com aproximação às décimas do metro.

8. O cabo está preso no topo de uma torre. A torre tem 16 metros de altura e o cabo tem 22 metros de comprimento. Determina a amplitude do ângulo que o cabo faz com a linha do solo. Apresenta o resultado arredondado à décima do grau.



9. Considera a inequação seguinte:

$$-2x < 6$$

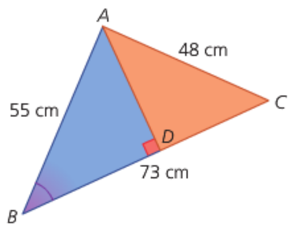
Qual é o conjunto solução desta inequação?

(A) $]-3,+\infty[$ (B) $]-\infty,3[$ (C) $]3,+\infty[$ (D) $]-\infty,3[$

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, Época especial

10. Considera o triângulo [ABC], em que:

$\overline{AB} = 55\ cm$, $\overline{AC} = 48\ cm$ e $\overline{BC} = 73\ cm$.

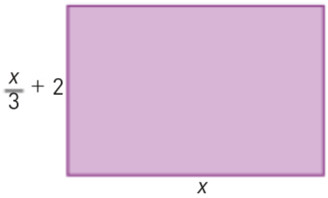


10.1. Mostra que o triângulo [ABC] é retângulo em *A*.

10.2. Determina a amplitude do ângulo *ABC*, arredondado às unidades.

10.3. Determina $\overline{AD}$ (com duas casas decimais).

11. Na figura está representado um retângulo em que um dos lados tem mais 2 unidades que a terça parte do outro lado. Determina os valores que x pode tomar para que o perímetro do retângulo não seja superior a 44.



12. Os alunos da turma da Marta combinaram encontrar-se no Parque das Nações. Cada um deles utilizou apenas um meio de transporte para chegar ao parque. Na tabela que se segue, podes observar os meios de transporte usados e o número de alunos que utilizou cada um deles.

Transporte	Comboio	Metropolitano	Autocarro	Bicicleta
N.º de alunos	9	12	6	3

Escolhendo, ao acaso, um aluno da turma da Marta, qual é a probabilidade de esse aluno **não** ter ido de autocarro?
Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

Exame Nacional 3.º ciclo, 1.ª chamada, 2006

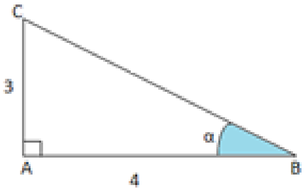
13. Na figura está representado o triângulo [ABC], retângulo em *A*. Qual é a opção correta?

(A) $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

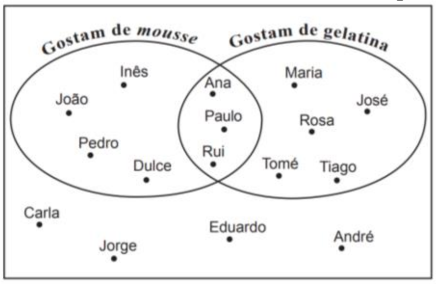
(B) $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ e $tg\ \alpha = \frac{4}{3}$

(C) $tg\ \alpha = \frac{3}{4}$ e $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$

(D) $sen\ \alpha = \frac{5}{3}$ e $\cos\alpha = \frac{5}{4}$



14. Na festa de anos do Miguel, perguntou-se aos 16 convidados se gostavam de *mousse* de chocolate e se gostavam de gelatina. No diagrama seguinte, está representada a distribuição dos convidados da festa de anos do Miguel, de acordo com as respostas dadas.

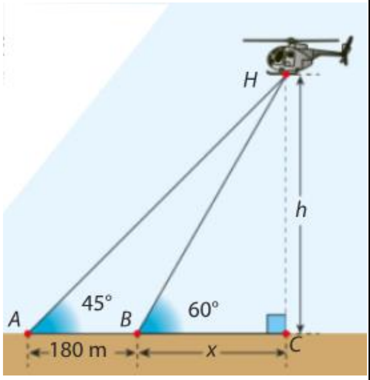


Escolhe-se, ao acaso, um dos convidados que gostam de gelatina. Qual é a probabilidade de esse convidado também gostar de *mousse* de chocolate?

(A) 25% (B) 37,5% (C) 50% (D) 62,5%

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, Época Especial

15. O helicóptero representado na figura ao lado por H é observado de dois pontos A e B, do solo. Os ângulos de elevação do helicóptero relativamente a A e B são, como se mostra na figura, de $45°$ e $60°$, respetivamente. A distância de A a B é $180\ metros$ e A, B e C pertencem à mesma reta.



Determina a altura, h, arredondada às unidades, a que se encontra o helicóptero do solo. Nos cálculos intermédios usa valores exatos.

16. Prova que a relação seguinte é válida para qualquer ângulo agudo de amplitude α:

$$sen\ \alpha \times cos\alpha \times tg\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

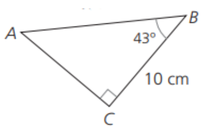
Tabela Trigonométrica

Graus	Seno	Co-seno	Tangente	Graus	Seno	Co-seno	Tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

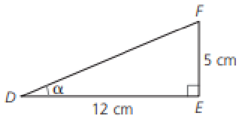
Anexo 10 – Questão-Aula

	COLÉGIO MILITAR	Professora
	4 ª Questão aula de Matemática - 9º Ano – 25 minutos	*Anabela Anunciada*
	Nome: ______________________ **TURMA** _____ **Nº**________	*Anabela Candeias*
DATA ___/___/**2019**	**Classificação:** ____________________ **Enc. Educação:** ______________	

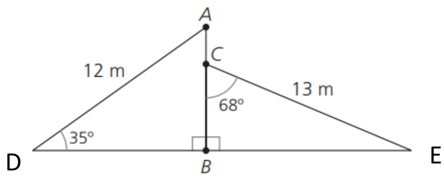
1. Calcula a medida do comprimento do segmento de reta $[AB]$, com aproximação às décimas.



2. Calcula a amplitude do ângulo α, arredondado às décimas.



3. Determina $\overline{AC}$ com aproximação às milésimas.



4. Sabendo que α é um ângulo agudo e que $sen\,\alpha = \frac{1}{5}$, determina o valor exato de:

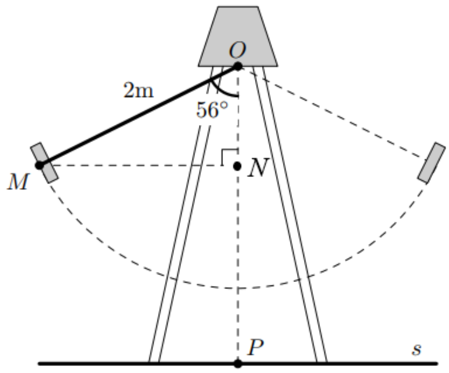
a) $cos\,\alpha$

b) $tg\,\alpha$

5. Na figura seguinte, está representado um esquema de um baloiço num instante em que a cadeira do baloiço se encontra na posição assinalada com o ponto M. No esquema, o segmento de reta $[OM]$ representa o cabo do baloiço e a reta s representa o solo.

Sabe-se que:

- O ponto P é o pé da perpendicular traçada do ponto O para a reta s;
- O ponto N é o pé da perpendicular traçada do ponto M para a reta OP;
- $M\hat{O}N = 56°$;
- $\overline{OM} = 2\ m$;
- $\overline{OP} = 2{,}5\ m$.



A figura não está desenhada à escala.

Determina $\overline{NP}$, ou seja, determina a distância da cadeira ao solo quando esta se encontra no ponto M.

Apresenta o valor pedido em metros, arredondado às centésimas. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva, pelo menos, três casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Sugestão: Começa por determinar $\overline{ON}$.

Prova Final 3.º Ciclo – 2017, Época especial

Bom trabalho!

☺

Q	1	2	3	4 a)	4 b)	5	T
C	10	10	20	15	15	30	100

Anexo 11 – Plano da aula 1

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 14/02/2019 **Ano:** 9.º Turma: B/C **Duração:** 90 minutos

LIÇÃO N.º: 92 e 93

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Revisões sobre as semelhanças de triângulos.
- Introdução ao estudo da trigonometria.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Revisões dos critérios de semelhança de triângulos; definição das razões trigonométricas.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Introduzir as razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Critérios de semelhança de triângulos; Teorema de Pitágoras.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio dedutivo, dado que os alunos irão, por eles próprios, chegar aos resultados pretendidos uma vez que as tarefas propostas apresentam um encadeamento com esse sentido.

RECURSOS:

- Da professora: manual; fichas de trabalho; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); apresentação em *PowerPoint*.
- Do aluno: manual; caderno diário.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (3 minutos)
   Formação dos grupos. (2 minutos)
   Preâmbulo histórico (5 minutos)
2. Ficha 10: "Semelhança de triângulos"
   i. Resolução (15 minutos)
   ii. Apresentação da resolução e discussão (10 minutos)
3. Atividade 1 da página 40 do manual
   i. Resolução e discussão. (10 minutos)
4. Ficha 11: "Razões trigonométricas"
   i. Preâmbulo razões trigonométricas (2 minutos)
   ii. Resolução 1ª página; (10 minutos)
   iii. Sistematização das razões trigonométricas; (5 minutos)
   iv. Resolução 2ª página; (13 minutos)
   v. Apresentação da resolução e discussão. (10 minutos)
5. Síntese da aula. (5 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos) e distribuirá os enunciados, relembrando aos alunos que devem fazer a sua resolução na ficha de trabalho e a correção diretamente no caderno diário.

Uma vez que os alunos estão a trabalhar colaborativa e cooperativamente, sempre que possível a professora sugerirá que eles discutam entre si a fim de se entreajudarem. Note-se que a professora não se está a descartar de cumprir o seu papel, mas aproveitará para potenciar o trabalho a pares.

Para esta aula foi preparada uma apresentação em *PowerPoint* (Anexo 11.1) que incluirá os conteúdos em estudo, nomeadamente os que serão abordados na ficha 10 (Anexo 2) e ficha 11 (Anexo 3).

Preâmbulo histórico **5 minutos**

A professora irá contextualizar historicamente o conteúdo matemático que será abordado imediatamente de seguida. Serão feitas referências ao matemático grego Tales de Mileto e a algumas das suas contribuições para a ciência, nomeadamente para a Matemática, estabelecendo-se a ligação com o Teorema de Tales (conteúdo a ser utilizado na ficha 10).

De forma a envolver todos os alunos no tópico em questão, a professora irá fazer as seguintes perguntas:

- Quanto acham que mede a pirâmide?
- Que conhecimentos matemáticos terá Tales utilizado para resolver este problema?

Estas perguntas servirão de mote para a resolução da primeira página da ficha 10, sendo que as suas respostas serão dadas à medida que a ficha vai sendo resolvida.

Durante a entrega dos enunciados, a professora dirá que a última tarefa da ficha será para trabalho de casa, que deverá ser feita numa folha à parte para entregar na aula seguinte. Simultaneamente, será entregue aos alunos um pequeno resumo sobre a semelhança de triângulos, que os auxiliará na resolução da ficha. A professora aproveitará o momento para chamar a atenção sobre as notações utilizadas, nomeadamente o símbolo de congruência que é utilizado no âmbito da geometria.

2. Ficha 10: “A semelhança de triângulos” **25 minutos**

i. <u>Resolução</u>: **15 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. <u>Apresentação da resolução e discussão</u> **10 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Exercício Motivação:

Pelos dados do enunciado sabemos que $B\hat{A}C = D\hat{B}E$, e que $E\widehat{D}B = 90° = C\hat{B}A$. Pelo critério AA de semelhança de triângulos, conseguimos garantir que estes dois triângulos são semelhantes, e, portanto, sai a seguinte relação:

$$\frac{2}{6} = \frac{altura\ da\ pirâmide\ (h)}{329 + 115} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{h}{444} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 444 = h \Leftrightarrow h = 148m$$

Portanto, a altura da pirâmide é 148 metros.

Resolução alternativa:

$$\frac{2}{altura\ da\ pirâmide\ (h)} = \frac{6}{329 + 115} \Leftrightarrow \frac{2}{h} = \frac{6}{444} \Leftrightarrow \frac{2 \times 444}{6} = h \Leftrightarrow h = 148m$$

Portanto, a altura da pirâmide é 148 metros.

É importante que a professora refira que as razões de semelhança que permitem relacionar ambos os triângulos podem ser escolhidas de duas formas: o aluno pode relacionar os lados de cada triângulo separadamente, ou então relacionar os lados correspondentes dos dois triângulos.

É preciso é que seja respeitada a ordem pela qual surgem as razões.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá:

- ter dificuldades em retirar do enunciado todos os dados de que necessita.
- não justificar que os triângulos são semelhantes, escrevendo simplesmente as razões, esquecendo-se do motivo pelo qual estas são válidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A Professora poderá perguntar: “Que dados temos?”; “Precisamos de justificar alguma coisa?”; “Se sim, ou quê?”; “Que critério de semelhança de triângulos podemos utilizar, tendo em conta os dados que nos dão?”; “O lado AB do triângulo $[ABC]$ corresponde a que lado do triangulo $[BDE]$?” (analogamente para os restantes lados.)

Exercício 1:

Par	Argumentação	Critério
A	$C\hat{A}B = H\hat{G}I$ e $A\hat{B}C = G\hat{H}I$	AA
B	$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou $\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$	LLL
C	$R\hat{P}Q = M\hat{P}N$ e $N\hat{M}P = R\hat{Q}P$	AA

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em perceber qual o critério que garante a semelhança entre os triângulos pelo facto de não compreender quais os dados apresentados em cada par.

Apoio a eventuais dificuldades:

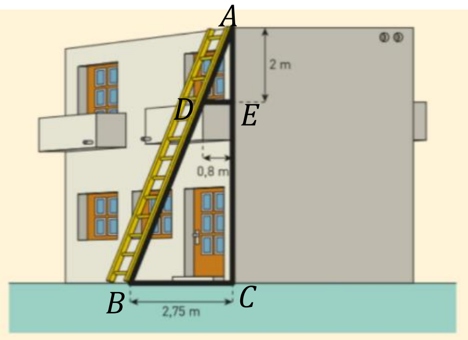
Caso a dúvida seja do par, a professora poderá perguntar para ambos os elementos: “Que dados temos?”; “Com esses dados, qual dos critérios podemos utilizar?”

Caso a professora repare que a dúvida é generalizada, resolverá, no quadro, para o primeiro par de triângulos, incentivando a participação da turma.

Exercício 2:

Pelo critério AA (o ângulo em A é partilhado pelos triângulos e $A\hat{E}D = A\hat{C}B = 90°$ já que $[AC]$ é a altura do edifício) os triângulos $[ADE]$ e $[ABC]$ são semelhantes, logo, a seguinte proporção é válida:

$$\frac{2+x}{2}=\frac{2,75}{0,8}\Leftrightarrow 1,6+0,8x=5,5\Leftrightarrow 0,8x=3,9\Leftrightarrow x=4,875$$



Portanto, a altura do edifício é $2+4,875=6,875\approx 6,9\ m$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

– perceber qual o critério que garante a semelhança entre os triângulos;

– estabelecer as relações entre os lados correspondentes.

O aluno poderá, assim que encontrar o valor de x, pensar que o problema está resolvido, esquecendo-se de que o comprimento pedido resulta da soma entre o valor de x e 2.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar aos alunos: “Que dados temos?”; “Com esses dados, qual dos critérios podemos utilizar?”.

Deverá ser sugerido ao aluno que represente os triângulos à parte da figura de forma a conseguir visualizar melhor os dados apresentados e assim conseguir perceber como deve relacionar os lados correspondentes.

A professora poderá perguntar, assim que se determinar o valor de x: “Já se encontrou a altura do edifício?”

3. Atividade 1 da página 40 do manual **10 minutos**

Esta atividade será resolvida pelos alunos com a professora, e à medida que vai sendo resolvida, vai sendo discutida. Pretende-se revisitar alguns tópicos previamente aprendidos pelos alunos.

i. Resolução e discussão: **10 minutos**

Exercício 1:

1.1. a) Opção B

1.1. b) Opção C

1.1. c) Opção A

É importante que os alunos compreendam que os catetos se relacionam com os ângulos e que consideramos o cateto oposto/adjacente a um determinado ângulo. É como se os catetos (terminologia introduzida aquando da aprendizagem do Teorema de Pitágoras) agora tivessem nomes próprios, nomes esses que dependem do ângulo que estamos a considerar. Já a hipotenusa é sempre o lado oposto ao ângulo de 90°.

1.2. Pelo Teorema de Pitágoras sai:

$$\overline{BC}^2 = 113{,}7^2 + 92{,}1^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 12927{,}69 + 8482{,}41 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 21410{,}1 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{21410{,}1},$$

$$então\ \overline{BC} \approx 146{,}3\ m$$

É escolhida a solução positiva, já que estamos a tratar de medidas.

Dificuldades:

O aluno poderá não se recordar do enunciado do Teorema de Pitágoras e/ou ter dificuldades em escolher entre as duas soluções da equação, justificando que se trata de uma medida e que o seu valor não pode ser negativo.

Apoio a eventuais dificuldades:

Caso a professora constate que a dúvida sobre o enunciado do Teorema de Pitágoras é geral, recordará o enunciado no quadro com a ajuda dos alunos que o souberem enunciar. Relativamente ao número de soluções, a professora poderá perguntar: “Interessam-nos as duas soluções?”; “O que representa $\overline{BC}$ no contexto do problema?”.

1.3. $B\hat{A}C = B\hat{D}E = B\hat{F}G = 90°$ e partilham o ângulo em B, então pelo critério de semelhança AA, os triângulos são semelhantes.

a) Opção D.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- perceber qual o critério que garante a semelhança entre os triângulos;
- relacionar os lados dos três triângulos entre si.

Apoio a eventuais dificuldades:

Caso a dúvida seja do par, a professora poderá perguntar para ambos os elementos: "Que dados temos?"; "Com esses dados, qual dos critérios podemos utilizar?"

A professora pode sugerir que os alunos representem cada triângulo à parte posicionando-os na forma que lhes apetecer de maneira a conseguirem relacioná-los. A professora pode também pedir que representem para cada triângulo os ângulos e que os relacionem com os lados correspondentes, nomeadamente que façam a marcação do ângulo reto e da hipotenusa, o que poderá facilitar a sua visualização.

4. Ficha 11: "A semelhança nas razões" 40 minutos

i. Preâmbulo razões trigonométricas **2 minutos**

A professora irá questionar a turma como determinar alturas de edifícios inacessíveis sem recorrer aos critérios de semelhança de triângulos, e ao Teorema de Pitágoras. Neste momento, serão mostradas fotografias de edifícios/monumentos do Colégio Militar. A altura destes edifícios/monumentos será o ponto de partida para o estudo da Trigonometria, sendo que a resposta a este problema será dada no final da unidade temática.

A professora poderá ainda perguntar aos alunos, se fazem alguma ideia de como se calcula a distância entre duas estrelas ou a medida da largura de um rio num determinado ponto. Serve este ponto para mostrar aos alunos que a trigonometria não é utilizada somente para cálculos de alturas.

ii. Resolução 1ª página: **10 minutos**

Exercício 1:

a) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular o comprimento da hipotenusa do triângulo, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \pm 13$$

Como só nos interessa o número positivo, uma vez que se trata de uma medida, $\overline{AB} = 13$. Assim:

$i.\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{13}$ $\qquad ii.\quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{13}$ $\qquad iii.\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{5}{12}$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em reconhecer que deverá utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar $\overline{\mathrm{AB}}$.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar: "O que representa $\overline{AB}$ no triângulo $[ABC]$?"; "Que conteúdo matemático conhecemos que nos permita calcular o comprimento dos lados de triângulos retângulos?"

b)

i. Medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo α;
ii. Medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo α;
iii. Medida do comprimento da hipotenusa.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em nomear cada lado do triângulo.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora pode sugerir que revisitem a atividade 1 da página 40 do manual que acabaram de realizar de forma a se relembrarem do que foi feito.

c)

i. $\frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = seno\ \alpha = sen\alpha$

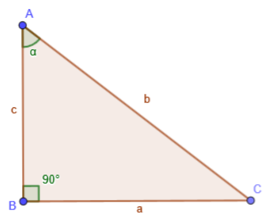
ii. $\frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjecente\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = cosseno\ \alpha = cos\alpha$

iii. $\frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \text{ângulo}\ \alpha} = tangente\ \alpha = tg\alpha$

Pretende-se realizar este exercício em conjunto com a turma. Será a professora a dar nomes aos quocientes apresentados, sendo, desta forma, introduzidas as razões trigonométricas. Para a resolução destas alíneas, serão usados os exercícios anteriores, e pretende-se que os alunos, com esses mesmos exercícios já tenham desenvolvido alguma intuição acerca daquilo que aqui é pedido.

iii. <u>Sistematização das razões trigonométricas</u> **5 minutos**

Neste momento a professora utilizará a apresentação em PowerPoint para sistematizar as ideias apresentadas e para possibilitar aos alunos escreverem no caderno o conteúdo aprendido.



$$sen\alpha = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

$$cos\alpha = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

$$tg\alpha = \frac{medidad\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ do\ comprmento\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \frac{a}{c}$$

Será importante informar os alunos que existem outras abreviaturas para o seno e para a tangente, assim a professora indicará que também podemos representar $sen\ \alpha = sin\ \alpha$ e $tg\ \alpha = tan\ \alpha$.

A professora pedirá para os alunos escreverem no seu caderno diário a seguinte nota: só podemos calcular as razões trigonométricas quando o triângulo é retângulo.

Oralmente, a professora pode referir que é por esta razão que sempre que surge seno/cosseno/tangente, no manual dos alunos, vem seguido de: “de um ângulo agudo”.

iv. <u>Resolução 2ª página</u>: **13 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

v. <u>Apresentação da resolução e discussão</u>: **10 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Exercício 2:

a) $sen\alpha = \frac{20}{29}; cos\alpha = \frac{21}{29}; tg\alpha = \frac{20}{21}$.

b) $sen\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; cos\beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; tg\beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

c) $sen\gamma = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; cos\gamma = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; tg\gamma = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

d) $sen\delta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; cos\delta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; tg\delta = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

É importante dizer aos alunos que eles devem apresentar sempre a forma irredutível do quociente resultante da razão trigonométrica que estão a determinar. No entanto, deverão, também, sempre, e tal como já fazem para as probabilidades, apresentar as frações originais, para mostrarem ao professor de onde surgem esses números.

A professora pode aproveitar o momento para pedir aos alunos que registem no seu caderno como se leem as letras gregas apresentadas: α – alfa; β – beta; γ – gama; δ – delta.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que sejam consultados o exercício 1 (anterior) da presente ficha e os registos que fez no caderno diário.

Exercício 3:

a) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow h = \pm 5,$$

como se trata de uma medida, $h = 5$.

Assim:

$$sen\alpha = \frac{3}{5}; cos\alpha = \frac{4}{5}; tg\alpha = \frac{3}{4}.$$

b) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo β, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 10^2 - 8^2 \Leftrightarrow c = \pm 6,$$

como se trata de uma medida, $c = 6$.

Assim:

$$sen\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; cos\beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; tg\beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

c) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento dos catetos do triângulo. A indicação da figura diz-nos que o triângulo é isósceles, logo os dois catetos têm a mesma medida de comprimento. Utilizando o Teorema de Pitágoras, sendo c a medida de comprimento desses catetos:

$$2^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow 4 = 2c^2 \Leftrightarrow c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2},$$

como se trata de uma medida, $c = \sqrt{2}$.

Assim:

$$sen\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}; cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}; tg\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

Dificuldades:

O aluno poderá:

- ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas.
- pensar que os dados que lhe são fornecidos diretamente serão suficientes para a realização do exercício.
- na alínea c), ter dificuldade em perceber que os catetos terem a mesma medida de comprimento.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que seja consultado o exercício 1 ou 2 da presente ficha, bem como o caderno diário.

A professora poderá perguntar: "Será que com os dados que temos, conseguimos determinar as razões trigonométricas pedidas?"; "O que precisamos para determinar o seno do ângulo pedido?"; "E para o cosseno?"; "E para a tangente?"; "Como conseguimos determinar esses comprimentos em falta, com os dados fornecidos?"; "Que conhecimento matemático temos para determinação de medidas de comprimentos dos lados de triângulos retângulos?"

5. Síntese **5 minutos**

A professora referirá que conforme o lado do triângulo cujo comprimento é conhecido e a forma como este se relaciona com o ângulo também conhecido é possível estabelecer as razões (quocientes), a que chamamos trigonométricas como vimos na ficha 11 (seno, cosseno e tangente).

O estudo da trigonometria é o estudo do triângulo que é uma figura importantíssima, dado que conhecendo bem as suas propriedades e possíveis relações entre elas, conhece-se qualquer outro polígono convexo, porque como já foi anteriormente estudado, qualquer polígono convexo é passível de triangulação.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que os alunos usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, a tarefa para trabalho de casa, a atividade 2 do manual (página 42) ou ainda o exercício 1 do caderno de atividades (página 85).

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, recorrentes nas aulas.

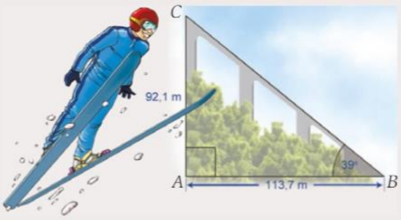
ANEXOS:

1 Atividade — **Ponto de partida**

Triângulos retângulos

O salto de esqui é disputado nos Jogos Olímpicos de inverno desde a sua primeira edição, que se realizou no ano de 1924, em Chamonix, França.

Na figura, está desenhado um triângulo $[ABC]$, retângulo em A, que representa um esquema de uma rampa de saltos de esqui.



1.1. No triângulo $[ABC]$, retângulo em A,

a) a **hipotenusa** é o lado…

(A) $[AB]$ (B) $[BC]$ (C) $[AC]$ (D) Nenhum.

b) o **cateto oposto ao ângulo** B é o lado…

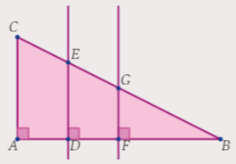
(A) $[AB]$ (B) $[BC]$ (C) $[AC]$ (D) Nenhum.

c) o **cateto adjacente ao ângulo** B é o lado…

(A) $[AB]$ (B) $[BC]$ (C) $[AC]$ (D) Nenhum.

1.2 Determina, arredondado às décimas, o comprimento da rampa de saltos de esqui.

1.3 Na figura, as retas DE e FG são perpendiculares ao lado $[AB]$ do triângulo $[ABC]$, retângulo em A.



a) Os triângulos $[ABC]$, $[DBE]$ e $[FBG]$ são semelhantes. Porquê?

b) Podemos afirmar que:

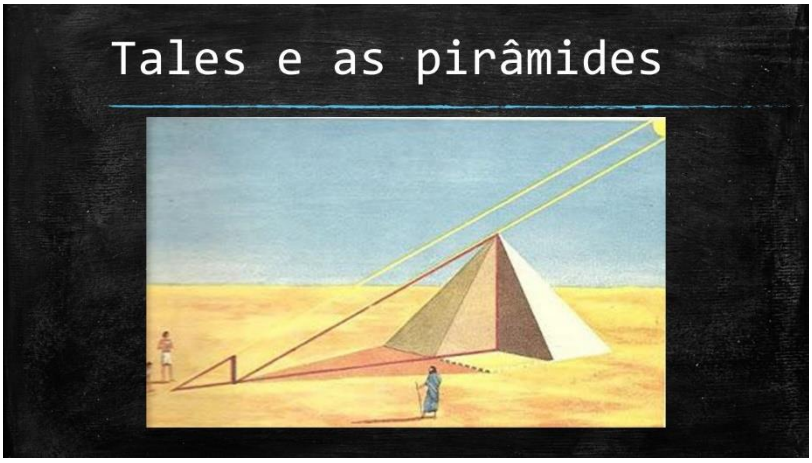
(A) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{GB}}{\overline{BF}}$

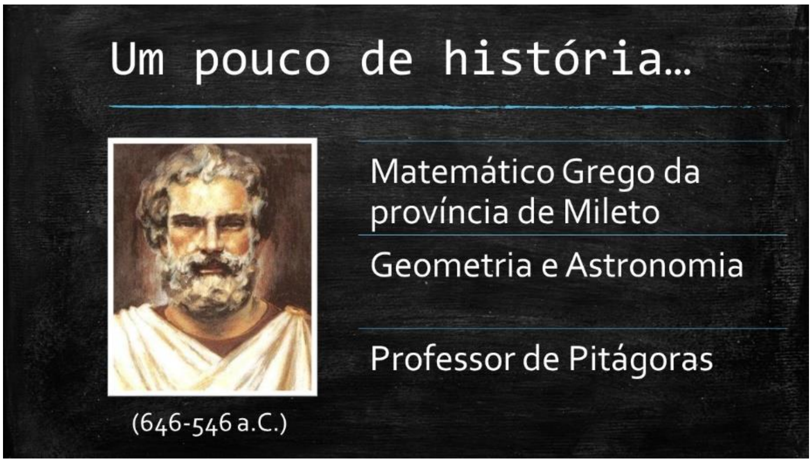
(B) $\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EG}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{FG}}$

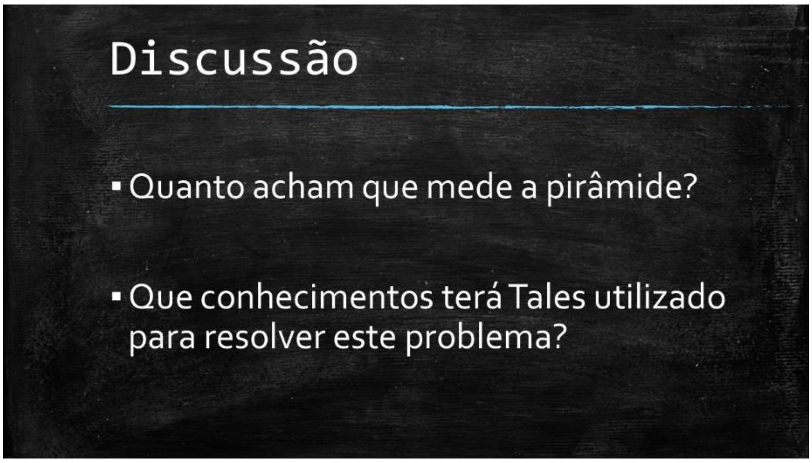
(C) $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{GB}}{\overline{BF}}$

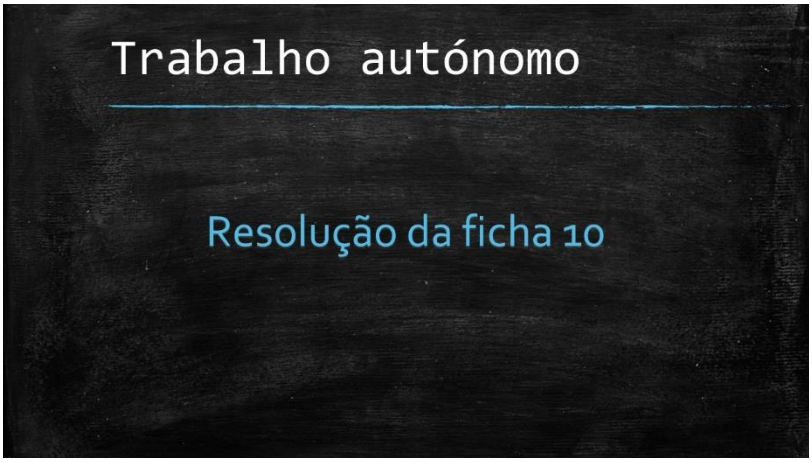
(D) $\frac{\overline{GF}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

Anexo 11.1 – Diapositivos da Aula 1

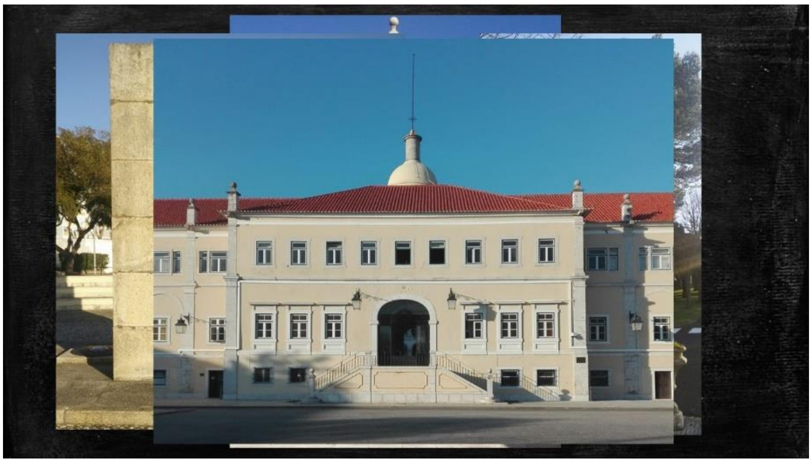





Discussão
▪ Quanto acham que mede a pirâmide?
▪ Que conhecimentos terá Tales utilizado para resolver este problema?


Trabalho autónomo
Resolução da ficha 10


Colégio Militar
Razões trigonométricas



Trabalho autónomo

Resolução da ficha 11

Resolução da ficha 11

a)

i. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{13}$;

ii. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{13}$;

iii. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{5}{12}$.

Resolução da ficha 11

b)

i. Cateto oposto ao ângulo α;

ii. Cateto adjacente ao ângulo α;

iii. Hipotenusa.

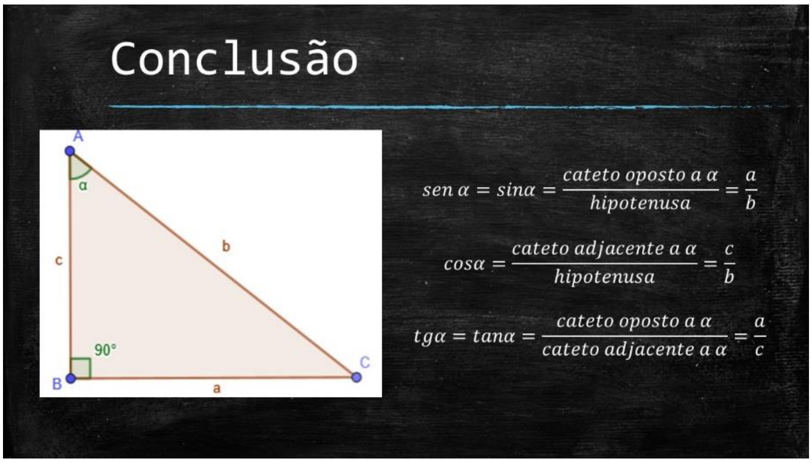
Resolução da ficha 11

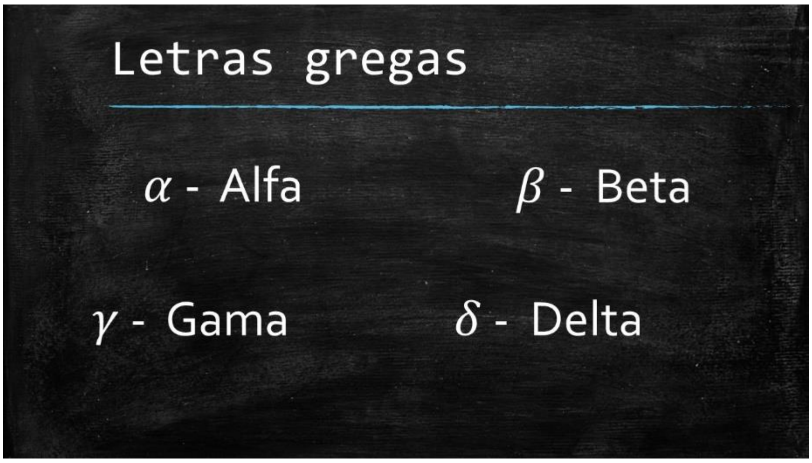
c)

i. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ \alpha}{hipotenusa} = seno\ \alpha$

ii. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ \alpha}{hipotenusa} = cosseno\ \alpha$

iii. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ \alpha} = tangente\ \alpha$


Conclusão
A
α
b
c
90°
B
a
C
$sen\ \alpha = sin\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{a}{b}$
$cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{c}{b}$
$tg\alpha = tan\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \frac{a}{c}$


Letras gregas
α - Alfa
β - Beta
γ - Gama
δ - Delta

Anexo 12 – Plano da aula 2

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professora-estagiária: Joana Dias

Data: 19/02/2019 **Ano:** 9.º Turma: B **Duração:** 90 minutos

LIÇÃO N.º: 95 e 96

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Razões da trigonométricas de um ângulo agudo: ficha de trabalho
- Resolução de exercícios.
- Esclarecimento de dúvidas para o teste.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e suas propriedades.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidação das razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio dedutivo, dado que os alunos irão, por eles próprios, chegar aos resultados pretendidos uma vez que as tarefas propostas apresentam um encadeamento com esse sentido.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro);
- Do aluno: manual; caderno diário.

MOMENTOS DA AULA:

Plano A – 45 min obrigatórios para esclarecimento de dúvidas dos alunos

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Síntese da aula anterior (10 minutos)
3. Continuação da resolução da ficha 11: "Razões trigonométricas"
   i. Resolução 2ª página; (15 minutos)
   ii. Apresentação da resolução e discussão. (10 minutos)
4. Esclarecimento de dúvidas para o teste. (45 minutos)

Plano B – caso não haja dúvidas dos alunos para esclarecer

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Síntese da aula anterior (10 minutos)
3. Continuação da resolução da ficha 11: "Razões trigonométricas"
   i. Resolução 2ª página; (15 minutos)
   ii. Apresentação da resolução e discussão. (10 minutos)
4. Resolução de exercícios do manual (45 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA – Plano B

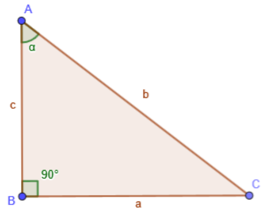
1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Síntese da aula anterior 10 minutos

Neste momento da aula, a professora irá recordar a sistematização das razões trigonométricas, realizada na aula anterior com o auxílio do seguinte esquema, criando um momento de questionamento oral.



$$sen\alpha = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

$$cos\alpha = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

$$tg\alpha = \frac{medidad\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ do\ comprmento\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \frac{a}{c}$$

A professora poderá orientar este momento com algumas das seguintes perguntas:

- Podemos aplicar as razões trigonométricas a qualquer triângulo?
- Num triângulo retângulo temos um ângulo reto, que nome se dá aos outros ângulos?
- Tendo em conta o ângulo α, que nome se dá ao cateto $\overline{BC}$? E ao cateto $\overline{AB}$?
- Que razões trigonométricas aprendemos na aula passada?
- Como calculamos o $seno\ \alpha$? E o $cosseno\ \alpha$? E a $tangente\ \alpha$?

Para concluir, a professor recordará aos alunos que só podemos calcular as razões trigonométricas quando o triângulo é retângulo. Para isso, a professora deverá fazer um triângulo retângulo no quadro para que eles percebam por que razão só calculam razões trigonométricas de ângulos agudos (soma dos ângulos internos de um triângulo = 180°). Poderá ainda referir que é por esta razão que sempre que surge seno/cosseno/tangente, no manual dos alunos, vem seguido de: “de um ângulo agudo”.

3. Continuação da resolução da ficha 11 **25 minutos**

i. <u>Resolução 2ª página</u>: **15 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **10 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Exercício 2:

a) $sen\alpha = \frac{20}{29}; cos\alpha = \frac{21}{29}; tg\alpha = \frac{20}{21}$.

b) $sen\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; cos\beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; tg\beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

c) $sen\gamma = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; cos\gamma = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; tg\gamma = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

d) $sen\delta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; cos\delta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; tg\delta = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

É importante dizer aos alunos que eles devem apresentar sempre a forma irredutível do quociente resultante da razão trigonométrica que estão a determinar. No entanto, deverão, também, sempre, e tal como já fazem para as probabilidades, apresentar as frações originais, para mostrarem ao professor de onde surgem esses números.

A professora pode aproveitar o momento para pedir aos alunos que registem no seu caderno como se leem as letras gregas apresentadas: α – alfa; β – beta; γ – gama; δ – delta.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que sejam consultados o exercício 1 (anterior) da presente ficha e os registos que fez no caderno diário.

Exercício 3:

a) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow h = \pm 5,$$

como se trata de uma medida, $h = 5$. Assim:

$$sen\alpha = \frac{3}{5}; cos\alpha = \frac{4}{5}; tg\alpha = \frac{3}{4}.$$

b) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo β, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 10^2 - 8^2 \Leftrightarrow c = \pm 6,$$

como se trata de uma medida, $c = 6$. Assim:

$$sen\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; cos\beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; tg\beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

c) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento dos catetos do triângulo. A indicação da figura diz-nos que o triângulo é isósceles, logo os dois catetos têm a mesma medida de comprimento. Utilizando o Teorema de Pitágoras, sendo c a medida de comprimento desses catetos:

$$2^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow 4 = 2c^2 \Leftrightarrow c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2},$$

Como se trata de uma medida, $c = \sqrt{2}$. Assim:

$$sen\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}; cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}; tg\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá:

- ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas.

- pensar que os dados que lhe são fornecidos diretamente serão suficientes para a realização do exercício.
- na alínea c), ter dificuldade em perceber que os catetos terem a mesma medida de comprimento.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que seja consultado o exercício 1 ou 2 da presente ficha, bem como o caderno diário.

A professora poderá perguntar: "Será que com os dados que temos, conseguimos determinar as razões trigonométricas pedidas?"; "O que precisamos para determinar o seno do ângulo pedido?"; "E para o cosseno?"; "E para a tangente?"; "Como conseguimos determinar esses comprimentos em falta, com os dados fornecidos?"; "Que conhecimento matemático temos para determinação de medidas de comprimentos dos lados de triângulos retângulos?".

4. Resolução de exercícios do manual **45 minutos**

i. Resolução:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão:

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Exercício 15:

a) $sen\ \alpha = \frac{5}{13} \approx 0{,}38;\ cos\ \alpha = \frac{12}{13} \approx 0{,}92;\ tg\ \alpha = \frac{5}{12} \approx 0{,}42$

b) $sen\ \beta = \frac{24}{25} = 0{,}96;\ cos\ \beta = \frac{7}{25} = 0{,}28;\ tg\ \beta = \frac{24}{7} \approx 3{,}43$

c) $sen\ \delta = \frac{21}{29} \approx 0{,}72;\ cos\ \delta = \frac{20}{29} \approx 0{,}69;\ tg\ \delta = \frac{21}{20} = 1{,}05$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas e a realizar o arredondamento às centésimas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que o aluno recorde a sistematização realizada na aula passada, bem como os exercícios já realizados no início da aula.

Relativamente ao arredondamento, a professora poderá recordar as casas decimais ao aluno, bem como a regra do arredondamento.

Exercício 16:

Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida do comprimento da hipotenusa do triângulo, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{45},$$

como só nos interessa o número positivo, uma vez que se trata de uma medida, a hipotenusa deste triângulo é $\sqrt{45}$.

a)

$sen\ \alpha = \frac{6}{\sqrt{45}} \approx 0{,}89;\ cos\ \alpha = \frac{3}{\sqrt{45}} \approx 0{,}45;\ tg\ \alpha = \frac{6}{3} = 2$

b)

$sen\ \beta = \frac{3}{\sqrt{45}} \approx 0{,}45;\ cos\ \beta = \frac{6}{\sqrt{45}} \approx 0{,}89;\ tg\ \beta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas e a realizar o arredondamento às centésimas.

O aluno poderá pensar que os dados que lhe são fornecidos serão suficientes para a realização do exercício.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que seja consultado o exercício 1 ou 2 da presente ficha, bem como o caderno diário.

A professora poderá perguntar: “Será que com os dados que temos, conseguimos determinar as razões trigonométricas pedidas?”; “O que precisamos para escrever o seno do ângulo pedido?”; “E o cosseno?”; “E a tangente?”; “Como conseguimos determinar esses comprimentos em falta, com os dados que nos são dados?"; "Que conhecimento matemático temos para determinação de comprimentos de lados de triângulos retângulos?"

Relativamente ao arredondamento, a professora poderá recordar as casas decimais ao aluno, bem como a regra do arredondamento.

Exercício 1:

a) $sen\,\hat{A} = \frac{20}{29} \approx 0{,}69;\ cos\,\hat{A} = \frac{21}{29} \approx 0{,}72;\ tg\,\hat{A} = \frac{20}{21} \approx 0{,}95$

b) $sen\,\hat{C} = \frac{21}{29} \approx 0{,}72;\ cos\,\hat{C} = \frac{20}{29} \approx 0{,}69;\ tg\,\hat{C} = \frac{21}{20} = 1{,}05$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas e a realizar o arredondamento às centésimas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que o aluno recorde a sistematização realizada na aula passada, bem como os exercícios já realizados no início da aula.

Relativamente ao arredondamento, a professora poderá recordar as casas decimais ao aluno, bem como a regra do arredondamento.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

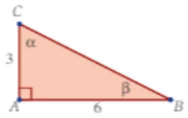
Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que os alunos usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, que realizem os exercícios 55, 56 e 57 da página 64 manual. Caso os exercícios 15 e 16 não sejam resolvidos na aula, irão como trabalho de casa.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelas mesmas, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

ANEXOS:

16 No triângulo retângulo da figura, os catetos medem 3 e 6 unidades.



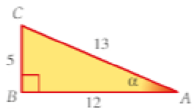
Calcula, arredondados às centésimas, os valores de:

a) $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$. **b)** $\text{sen}\,\beta$, $\cos\beta$ e $\text{tg}\,\beta$.

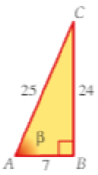
15 Com a calculadora, determina valores arredondados às centésimas das razões trigonométricas do ângulo assinalado em cada um dos seguintes triângulos retângulos.

As medidas estão em metros.

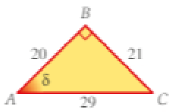
a)



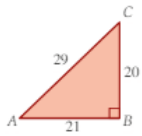
b)



c)



1 O $\Delta[ABC]$ representado na figura é retângulo em B.



Atendendo às medidas indicadas, calcula valores arredondados às centésimas de:

a) $\text{sen}\,\hat{A}$; $\cos\hat{A}$; $\text{tg}\,\hat{A}$

b) $\text{sen}\,\hat{C}$; $\cos\hat{C}$; $\text{tg}\,\hat{C}$

Anexo 13 – Plano da Aula 3

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 21/02/2019 **Ano:** 9.º **Turma:** B **Duração:** 90 minutos

LIÇÃO N.º: 97 e 98

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Esclarecimento de dúvidas.
- Invariância nas razões trigonométricas: ficha de trabalho.
- Razões trigonométricas de dois ângulos de igual amplitude.
- Resolução de exercícios.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e as suas propriedades.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidação e estudo de propriedades das razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas e critérios de semelhança de triângulos.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;

- Desenvolver o raciocínio matemático, dado que os alunos irão, por eles próprios, chegar aos resultados pretendidos uma vez que as tarefas propostas apresentam um encadeamento com esse sentido.

RECURSOS:

- Da professora: manual; fichas de trabalho; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); *tablets* com Geogebra.
- Do aluno: manual; caderno diário.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Resolução de exercícios do manual
   i. Apresentação da resolução do exercício 15 e 16 (15 minutos)
   ii. Exercício 1, página 63
      i. Resolução; (10 minutos)
      ii. Apresentação da resolução. (5 minutos)
3. Invariância das razões trigonométricas: Ficha de trabalho 12
      i. Resolução dos três primeiros exercícios da ficha (20 minutos)
      ii. Discussão e Sistematização das ideias; (10 minutos)
      iii. Resolução do último exercício da ficha; (5 minutos)
      iv. Discussão e Sistematização das ideias. (20 minutos)
         1. Atividade 6, página 47 do manual
         2. Exercício 7, página 47 do manual

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Resolução de exercícios do manual 30 minutos

i. <u>Resolução</u>: **15 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Na aula anterior, foi indicado aos alunos dois exercícios para trabalho de casa, assim a professora aproveitará o momento para verificar quem os realizou.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **15 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Durante a apresentação da resolução dos exercícios, a professora chamará à atenção sobre a notação utilizada: o aluno deverá ser capaz de utilizar os sinais " $=$ " e " $\approx$ " corretamente.

Exercício 15 (Trabalho de casa):

a) $sen\ \alpha = \frac{5}{13} \approx 0{,}38;\ cos\ \alpha = \frac{12}{13} \approx 0{,}92;\ tg\ \alpha = \frac{5}{12} \approx 0{,}42$

b) $sen\ \beta = \frac{24}{25} = 0{,}96;\ cos\ \beta = \frac{7}{25} = 0{,}28;\ tg\ \beta = \frac{24}{7} \approx 3{,}43$

c) $sen\ \delta = \frac{21}{29} \approx 0{,}72;\ cos\ \delta = \frac{20}{29} \approx 0{,}69;\ tg\ \delta = \frac{21}{20} = 1{,}05$

Exercício 16 (Trabalho de casa):

Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida do comprimento da hipotenusa do triângulo, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{45},$$

como só nos interessa o número positivo, uma vez que se trata de uma medida, a hipotenusa deste triângulo é $\sqrt{45}$.

a) $sen\ \alpha = \frac{6}{\sqrt{45}} \approx 0{,}89;\ cos\ \alpha = \frac{3}{\sqrt{45}} \approx 0{,}45;\ tg\ \alpha = \frac{6}{3} = 2$

b) $sen\ \beta = \frac{3}{\sqrt{45}} \approx 0{,}45;\ cos\ \beta = \frac{6}{\sqrt{45}} \approx 0{,}89;\ tg\ \beta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Exercício 1:

a) $sen\,\hat{A} = \frac{20}{29} \approx 0{,}69;\ cos\,\hat{A} = \frac{21}{29} \approx 0{,}72;\ tg\,\hat{A} = \frac{20}{21} \approx 0{,}95$

b) $sen\,\hat{C} = \frac{21}{29} \approx 0{,}72;\ cos\,\hat{C} = \frac{20}{29} \approx 0{,}69;\ tg\,\hat{C} = \frac{21}{20} = 1{,}05$

Dificuldades:

Prevê-se que não haja dificuldade na realização deste exercício.

3. Invariância nas razões trigonométricas: Ficha 12 55 minutos

Ficha de trabalho 12: "Invariância nas razões trigonométricas"

Neste momento, a professora entregará as fichas de trabalho, um enunciado a cada grupo e ainda os *tablets* que também serão distribuídos um por cada grupo.

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter. Como é habitual, a seleção dos grupos a apresentar a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Dificuldades gerais:

Prevêem-se algumas dificuldades com a manipulação do GeoGebra dado que, apesar dos alunos estarem familiarizados com o software, já faz algum tempo que não o utilizam. Desta forma, se a professora compreender que existe dificuldade generalizada com o mesmo, deverá realizar o exercício 2 com os alunos, utilizando para isso o computador de secretária, projetando-o para os alunos através do projetor da sala.

i. Resolução dos três primeiros exercícios da ficha **20 minutos**

Exercício 1:

1.1. 28,3 ° (cada aluno poderá ter um valor diferente)

1.2. Por observação na zona gráfica do programa, sai:

1.2.1. 0,47

1.2.2. 0,88

1.2.3. 0,54

Exercício 2:

2.1. Conforme se movimenta o ponto C para cima (aumenta-se a distância de A para C, aumentando, assim, a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo), a amplitude do ângulo aumenta. Por outro lado, se o C se movimento o ponto C para baixo (diminui-se a distância de A para C, diminuindo, assim, a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo), a amplitude do ângulo diminui.

2.2. Quando o C de move para cima, o seno e a tangente aumentam e o cosseno diminui; quando se move o ponto C para baixo, o seno e a tangente diminuem e o cosseno aumenta.

2.3. Sim, porque ao mexermos com o ponto C, alteramos as medidas de comprimento da hipotenusa e do cateto oposto, portanto as razões trigonométricas se alteram.

Exercício 3:

3.1. O valor do ângulo não se altera.

3.2. O ângulo em A é partilhado por todos os triângulos que se possam obter e todos têm um ângulo reto (o triângulo nunca deixa de ser retângulo), logo pelo critério AA os triângulos são todos semelhantes entre si.

3.3. As razões trigonométricas permanecem inalteráveis, seja qual for a posição do ponto B.

3.4. Não! À medida que se movimenta o ponto B, os comprimentos de todos os lados do triângulo vão-se alterando, no entanto, as razões trigonométricas mantém-se invariáveis.

ii. <u>Discussão e Sistematização das ideias</u> **10 minutos**

A professora poderá questionar os alunos: “Então, mas porque será que as razões trigonométricas se alteram quando mexo no ponto C e não se alteram quando mexo no ponto A ou no ponto B?” Os alunos deverão ser capazes de compreender que esta alteração vem do facto de ao movimentar o ponto C só se altera dois dos comprimentos dos lados (cateto oposto ao ângulo alfa e a hipotenusa), enquanto que ao movimentar o ponto B ou A, todas as razões se alteram ao mesmo tempo e da mesma forma, ou seja, são criados triângulos semelhantes a cada momento (como já argumentamos na pergunta 3).

Para concluir aquilo que os alunos acabarem de observar nos três primeiros exercícios da ficha, a professora explicará aos alunos que se considerar dois triângulos quaisquer semelhantes entre si (um mais pequeno que o outro), pode-se considerar que as medidas dos comprimentos de cada triângulo vêm em unidades diferentes (o triângulo mais pequeno poderá estar em cm, e o maior em metros), no entanto, como já viram, as razões são iguais para ambos os triângulos. E porquê? Porque as razões trigonométricas dependem apenas da amplitude do ângulo que estamos a considerar (daí insistirmos para que escrevam sempre seno de alfa, cosseno de alfa, etc.). Assim, os alunos deverão escrever no seu caderno: O valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo é independente da unidade de comprimento fixada, mas esta tem de ser a mesma para os dois termos da razão.

iii. Resolução do último exercício da ficha **5 minutos**

Exercício 4:

4.1. Não a ambas as perguntas. Por muito que se tente aproximar o valor do seno a um número negativo o mais próximo que chega é a perto de zero. Analogamente para o valor 1,5.

4.2. O seno e o cosseno podem variar entre zero e um.

iv. Discussão e Sistematização das ideias **20 minutos**

Para provar aquilo que os alunos conjeturam na pergunta 4 na ficha de trabalho 12, serão propostas as atividades 6 e 7 da página 47 do manual, que generalizam aquilo que foi visto na ficha de trabalho.

i. Resolução: **3 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **5 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 6 da página 47 do manual:

Temos que $sen\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, sendo esta uma razão entre duas medidas, o quociente é maior do que zero. Temos ainda que $\overline{BC}$ é o comprimento de um cateto, logo é menor que $\overline{AC},$ que é o comprimento da hipotenusa, assim, esta razão será menor que 1. Portanto, $0 < sen\alpha < 1$. De forma análoga se conclui que $0 < cos\alpha < 1$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- conseguir escrever o quociente que traduz o seno e o cosseno;
- compreender que o quociente entre dois números positivos é um número positivo, e dado que as razões trigonométricas são quocientes entre medidas, estas também serão positivas;
- relembrar que numa fração com numerador e denominador positivos, quando o numerador é menor do que o denominador, então o quociente é sempre menor do que um;
- concluir o pretendido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende.

A professora poderá perguntar:

- "O que são $\overline{BC};\ \overline{AB}\ e\ \overline{AC}$?"; "Se são medidas de comprimento podem ser negativas?"; "E zero?".
- "Que tipo de fração é esta?"; "O numerador é maior ou menor que o denominador?"; "Então o que acontece quando tenho frações deste tipo?".

A professora sugerirá ao aluno que escreva em dois passos as inferências que retirou da atividade: primeiramente, $sen\alpha > 0$ e $sen\alpha < 1$. Relembrando o que foi lecionado na unidade das inequações, pode-se colocar o $sen\alpha$ no meio e obter a dupla desigualdade. Analogamente para o cosseno.

iii. Sistematização das ideias: **2 minutos**

A professora indicará aos alunos que registem no seu caderno o seguinte resultado:

- *O seno e o cosseno de um ângulo agudo é sempre um número real positivo menor do que 1, isto é,* $0 < sen\alpha < 1$ *e* $0 < cos\alpha < 1$, *para todo o ângulo agudo* α.

Para fazer a ligação entre esta atividade e a atividade 7 a professora perguntará à turma:

- "Então e entre que valores se situará a tangente?"; "Acham que será também entre 0 e 1?".

Resolução do exercício 7 da página 47 do manual:

i. Resolução: **3 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **5 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

a) $tg\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$;

b)

- $0 < tg\alpha < 1$, quando $\overline{BC} < \overline{AB}$.
- $tg\alpha = 1$, quando $\overline{BC} = \overline{AB}$.
- $tg\alpha > 1$, quando $\overline{BC} > \overline{AB}$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- conseguir escrever o quociente que traduz a tangente;

- compreender que o quociente entre dois números positivos é um número positivo, e dado que as razões trigonométricas são quocientes entre medidas, estas também serão positivas;
- relembrar que numa fração com numerador e denominador positivos, quando o numerador é menor do que o denominador, então o quociente é sempre menor do que um.

Motivado pela figura, o aluno poderá considerar que o comprimento do cateto oposto é sempre menor do que o do cateto adjacente, e, portanto, a razão é sempre menor do que 1.

O aluno poderá ter dificuldades em concluir o pretendido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende.

A professora poderá perguntar:

- "O que são $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$?"; "Se são medidas de comprimento podem ser negativas?"; "E zero?"
- Para o primeiro caso: "Que tipo de fração é esta?"; "O numerador é maior ou menor que o denominador?"; "Então o que acontece quando tenho frações deste tipo?".

A professora sugerirá, se necessário, para o segundo caso, ao aluno que escreva em dois passos as inferências que retirou da atividade: primeiramente, $tg\alpha > 0$ e $tg\alpha < 1$. Relembrando o que foi lecionado na unidade das inequações, pode-se colocar o $tg\alpha$ no meio e obter a dupla desigualdade.

A professora poderá perguntar:

- para o terceiro caso: "Quando é que um quociente é 1?"; "Se o numerador é igual ao denominador, o que acontece com o triângulo?"; "Como se chama esse tipo de triângulo?".
- "Quando é que uma razão é maior do que 1?"; "Então se o numerador é maior, o que acontece com o triângulo?".

iii. Sistematização das ideias: **2 minutos**

A professora indicará aos alunos que registem no seu caderno o seguinte resultado:

A tangente de um ângulo agudo é sempre maior do que zero e:

- *Menor do que 1, quando o comprimento do cateto oposto é menor que o comprimento cateto adjacente;*
- *Igual a 1, quando o cateto oposto e o cateto adjacente têm o mesmo comprimento, ou seja, quando o triângulo é isósceles;*
- *Maior do que 1, quando o comprimento do cateto oposto é maior do que o comprimento do cateto adjacente.*

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

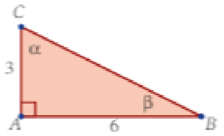
Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que os alunos usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 18 e 19 da página 53 do manual.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelas mesmas, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

ANEXOS:

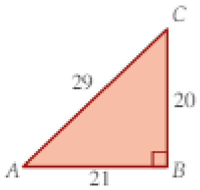
16 No triângulo retângulo da figura, os catetos medem 3 e 6 unidades.



Calcula, arredondados às centésimas, os valores de:

a) sen α, cos α e tg α. **b)** sen β, cos β e tg β.

1 O $\Delta[ABC]$ representado na figura é retângulo em B.



Atendendo às medidas indicadas, calcula valores arredondados às centésimas de:

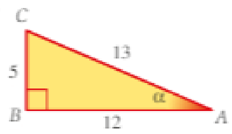
a) sen $\hat{A}$; cos $\hat{A}$; tg $\hat{A}$

b) sen $\hat{C}$; cos $\hat{C}$; tg $\hat{C}$

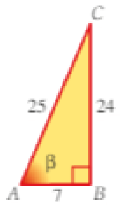
15 Com a calculadora, determina valores arredondados às centésimas das razões trigonométricas do ângulo assinalado em cada um dos seguintes triângulos retângulos.

As medidas estão em metros.

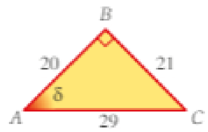
a)



b)

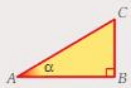


c)



6 Atividade **Justificar**

Considera um triângulo $[ABC]$ retângulo em B e designa o ângulo interno com vértice em A por α, como sugere a figura.



Justifica que o seno de α e o cosseno de α são números positivos, menores do que 1.

Caderno de Apoio às Metas

Como pudeste verificar na atividade anterior:

O seno e o cosseno de um ângulo agudo α são números positivos menores do que 1: $0 < \text{sen}\,\alpha < 1$ e $0 < \cos\alpha < 1$

7 Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em B, representado na atividade 6.

a) Utilizando as letras da figura, completa:

$\text{tg}\ \alpha =$?

b) Completa:

- $0 < \text{tg}\,\alpha < 1$ quando $\overline{BC} < \overline{AB}$.
- $\text{tg}\,\alpha = 1$ quando ?
- $\text{tg}\,\alpha > 1$ quando ?

Anexo 14 – Plano da Aula 4

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 25/02/2019 **Ano:** 9.º Turma: B/C **Duração:** 90 minutos

LIÇÃO N.º: 99

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Razões trigonométricas de dois ângulos de igual amplitude: continuação.
- Razões trigonométricas: calculadora.
- Resolução de exercícios.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e as suas propriedades.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidação e estudo de propriedades das razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas e critérios de semelhança de triângulos.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio matemático, dado que os alunos irão, por eles próprios, chegar aos resultados pretendidos uma vez que as tarefas propostas apresentam um encadeamento com esse sentido.

RECURSOS:

- Da professora: manual; fichas de trabalho; tabelas de registo (participação e idas ao quadro);
- Do aluno: manual; caderno diário.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)

   Formação dos grupos.
2. Atividade 6 do manual (pág. 47)
   i. Resolução; (3 minutos)
   ii. Apresentação da resolução; (5 minutos)
   iii. Sistematização das ideias. (2 minutos)
3. Exercício 7 do manual (pág. 47)
   i. Resolução; (3 minutos)
   ii. Apresentação da resolução; (2 minutos)
   iii. Sistematização das ideias; (5 minutos)
4. Razões trigonométricas de dois ângulos de igual amplitude: Atividade 5
   i. Resolução; (5 minutos)
   ii. Apresentação da resolução; (5 minutos)
   iii. Sistematização das ideias. (2 minutos)
5. Razões trigonométricas: calculadora (8 minutos)
   i. Atividade 8, pág. 48;
      i. Esclarecimento; (5 minutos)
      ii. Resolução; (3 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem os grupos já previamente indicados, relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

Os momentos 2 e 3 apresentam-se repetidos relativamente ao plano anterior uma vez que não foi cumprido, nesse sentido apresentam-se apenas as suas resoluções.

Atividade 6 do manual **10 minutos**

i. Resolução: **3 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **5 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 6 da página 47 do manual:

Temos que $sen\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, sendo esta uma razão entre duas medidas, o quociente é maior do que zero. Temos ainda que $\overline{BC}$ é o comprimento de um cateto, logo é menor que $\overline{AC},$ que é o comprimento da hipotenusa, assim, esta razão será menor que 1. Portanto, $0 < sen\alpha < 1$. De forma análoga se conclui que $0 < cos\alpha < 1$.

iii. Sistematização das ideias: **2 minutos**

A professora indicará aos alunos que registem no seu caderno o seguinte resultado:

- *O seno e o cosseno de um ângulo agudo é sempre um número real positivo menor do que 1, isto é,* $0 < sen\alpha < 1$ *e* $0 < cos\alpha < 1$, *para todo o ângulo agudo* α.

Para fazer a ligação entre esta atividade e a atividade 7 a professora perguntará à turma:

- "Então e entre que valores se situará a tangente?"; "Acham que será também entre 0 e 1?".

Resolução do exercício 7 da página 47 do manual:

i. Resolução: **3 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **5 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

a) $tg\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$;

b)

- $0 < tg\alpha < 1$, quando $\overline{BC} < \overline{AB}$.
- $tg\alpha = 1$, quando $\overline{BC} = \overline{AB}$.
- $tg\alpha > 1$, quando $\overline{BC} > \overline{AB}$.

iii. Sistematização das ideias: **2 minutos**

A professora indicará aos alunos que registem no seu caderno o seguinte resultado:

A tangente de um ângulo agudo é sempre maior do que zero e:

–Menor do que 1, quando o comprimento do cateto oposto é menor que o comprimento cateto adjacente;

–Igual a 1, quando o cateto oposto e o cateto adjacente têm o mesmo comprimento, ou seja, quando o triângulo é isósceles;

–Maior do que 1, quando o comprimento do cateto oposto é maior do que o comprimento do cateto adjacente.

4. Atividade 5 **12 minutos**

i. Resolução: **5 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Sendo uma atividade onde é necessário que os alunos realizem uma demonstração, é espectável que haja uma dificuldade generalizada da turma, pelo que se isso realmente se comprovar, a professora fará a primeira alínea e então, de seguida os alunos farão autonomamente as outras alíneas.

É importante que os alunos se convençam de que este é um resultado verdadeiro e óbvio.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **5 minutos**

Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 5:

a) $A\hat{R}P = B\hat{S}Q = 90°$ e $\hat{\beta} = \widehat{\beta'}$, então pelo critério de semelhança AA (ângulo-ângulo), os triângulos $[ARP]$ e $[BSQ]$ são semelhantes.

Em triângulos semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais. Logo,

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}} \Leftrightarrow \overline{PR} \times \overline{BQ} = \overline{QS} \times \overline{AP} \Leftrightarrow \frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{BQ}} \Leftrightarrow sen\,\beta = sen\,\beta' \;\blacksquare$$

b) De modo análogo:

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}} \Leftrightarrow \overline{AR} \times \overline{BQ} = \overline{BS} \times \overline{AP} \Leftrightarrow \frac{\overline{AR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}} \Leftrightarrow cos\,\beta = cos\,\beta' \;\blacksquare$$

c) De modo análogo:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{BS}} \Leftrightarrow \overline{PR} \times \overline{BS} = \overline{QS} \times \overline{AR} \Leftrightarrow \frac{\overline{PR}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{BS}} \Leftrightarrow tg\,\beta = tg\,\beta' \;\blacksquare$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

– conseguir perceber como iniciar a demonstração, que passa, precisamente, por começar por justificar que os triângulos são semelhantes;

– escrever os quocientes que relacionam os lados de ambos os triângulos e depois escrever a fração conveniente para a obtenção da razão trigonométrica respetiva.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora começará por sugerir que os alunos observem que têm dois triângulos e que pelos dados do enunciado, é possível relacioná-los (semelhança de triângulos e sua argumentação).

A professora dirá aos alunos que temos que provar uma proposição do tipo: "se, …, então, …", logo assumimos que a primeira parte da frase é verdadeira, e é por essa que começamos a nossa demonstração, sendo essa a primeira frase da mesma. A segunda parte da frase é onde queremos chegar, logo, será essa a última frase da demonstração que estamos a fazer. A professora deverá escrever dessa forma no quadro, deixando o espaço entre a primeira e a última frase, dizendo que com os dados fornecidos inicialmente, os alunos deverão preencher o que falta no meio, de forma a completar a demonstração. (A primeira demonstração deverá ser feita em conjunto de forma a que os alunos percebam o que está envolvido e que tipo de argumentos deverão ser elaborados para a prova.)

A professora poderá perguntar:

- "Já provei que os triângulos são semelhantes, então como posso relacionar os lados de cada triângulo de forma a obter o que pretendo?";
- "Depois de relacionar ambos os triângulos como posso fazer aparecer a razão trigonométrica que pretendo?"; "O que é o seno (cosseno, tangente) nestes triângulos?".

Para fazer a passagem da semelhança entre os dois triângulos e as razões trigonométricas, a professora poderá fazer uma passagem intermédia, utilizando um conhecimento do 2.º ciclo - o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

iii. Sistematização de ideias: **2 minutos**

Neste momento a professora indicará aos alunos que escrevam no caderno diário o seguinte:

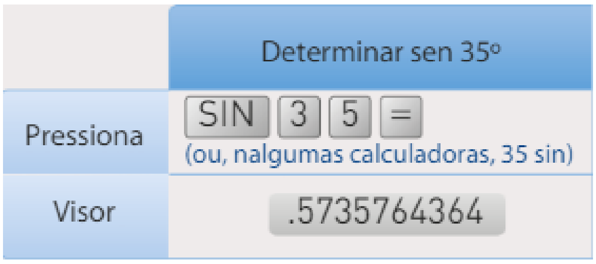
Ângulos de igual amplitude têm o mesmo seno, cosseno e tangente.

5. Razões trigonométricas: calculadora **8 minutos**

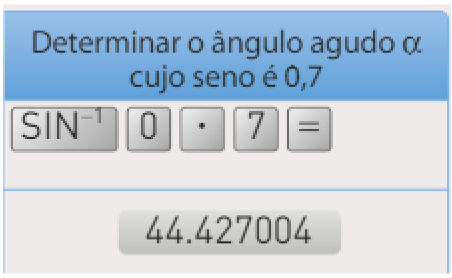
i. Esclarecimento: **5 minutos**

Antes de iniciar, a professora irá confirmar se os alunos têm a calculadora em graus. Para isso pedirá aos alunos que calculem a tangente de 45°. Àqueles alunos que não der o resultado 1, será feita a correção nas definições na calculadora.

Para um melhor entendimento dos alunos, a professora utilizará os seguintes esquemas e fará referência aos seguintes pontos:



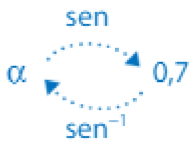
- “Procurem a tecla SIN ou SEN na vossa calculadora. Então vamos lá calcular o $sen\ 35°$”
- “Ou seja, ao conhecer o ângulo, descobrimos o valor da razão trigonométrica.”
- “Então agora reparem no que está escrito em cima da tecla do seno?” Alguns alunos responderão SIN^{-1} ou SEN^{-1} ou $ARCSEN$ ou $ARCSIN$ pelo que será indicado que estas são todas maneiras válidas de representar a inversa da razão trigonométrica.
- “Se ao saber o ângulo, descobrimos o valor da razão usando a tecla SEN, o que acham que poderemos descobrir com a inversa?” Será expetável que os alunos respondam que é o valor do ângulo.
- Então vamos lá calcular qual o ângulo que tem o valor do seno 0,7:



- Para saber qual a combinação de teclas a pressionar para obter SIN^{-1}, a professora poderá indicar as seguintes opções (conforme o modelo da calculadora):
    - SHIFT + SIN
    - 2nd + SIN

- INV + SIN

– Para concluir, a professora utilizará o esquema seguinte para fazer uma síntese do que foi referido anteriormente, caso seja conhecido o ângulo utilizamos o SIN para descobrir o valor da razão trigonométrica; caso seja conhecido o valor da razão trigonométrica, utilizamos SIN^{-1} para descobrir o valor do ângulo.



ii. <u>Resolução</u>: **3 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter. Será indicado aos alunos que confirmem os resultados pelas soluções do manual. Caso hajam alunos a terminar mais cedo relativamente à grande maioria da turma, será indicado que resolvam o exercício 9 do manual utilizando a calculadora e não a tabela como consta no enunciado.

Atividade 8:

8.1.

a) $sen\ 35° \approx 0{,}57$

b) $sen\ \alpha = 0{,}7, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}7) \approx 44{,}43°$

8.2.

a) $sen\ 64° \approx 0{,}899$

b) $cos\ 73° \approx 0{,}292$

c) $tg\ 21{,}3° \approx 0{,}390$

d) $sen\ 45° \approx 0{,}707$

e) $cos\ 60° \approx 0{,}500$

f) $tg\ 30{,}8° \approx 0{,}596$

8.3.

a) $sen\ \alpha = 0{,}531, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}531) \approx 32{,}1°$

b) $cos\ \alpha = \frac{3}{7}, então\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 64{,}6°$

c) $tg\ \alpha = 3{,}4, então\ \alpha = tg^{-1}(3{,}4) \approx 73{,}6°$

d) $sen\ \alpha = 0{,}001, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}001) \approx 0{,}1°$

e) $cos\ \alpha = 0{,}84, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}84) \approx 32{,}9°$

f) $tg\ \alpha = 10000, então\ \alpha = tg^{-1}(10000) = 90{,}0°$

Exercício 9:

9.1.

a) $sen\ 85° \approx 0{,}99619 \approx 0{,}996$

b) $tg\ 63° \approx 1{,}96261 \approx 1{,}963$

c) $cos\ 21° \approx 0{,}93358 \approx 0{,}934$

9.2.

a) $tg\ \alpha = 0{,}869, então\ \alpha = tg^{-1}(0{,}869) \approx 41°$

b) $sen\ \alpha = 0{,}210, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}210) \approx 12°$

c) $cos\ \alpha = 0{,}377, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}377) \approx 68°$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- utilizar a calculadora devidamente, isto é, se lhe por pedido o ângulo cuja razão trigonométrica é uma - fração, caso o aluno não utilize os parêntesis o resultado não será o correto;
- compreender quando utilizar a razão trigonométrica ou a sua inversa;
- fazer os arredondamentos quando a casa decimal que deverá sofrer alterações for 9, como é exemplo o 8.2. c) e o 8.3. f).

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá chamar à atenção de toda a turma que quando temos um número fracionário, os alunos deverão: ou calculam primeiro esse número fracionário e depois pedem à calculadora o valor da razão trigonométrica desse mesmo número, ou então, deverão escrever esse número entre parêntesis. Para ilustrar esta situação a professora utilizará como exemplo o exercício 8.3. b).

A professora deverá perguntar: "O que é pedido?"; "O que é dado?"; a professora poderá ainda sugerir aos alunos que escrevam a razão trigonométrica que para que percebam como se relacionam os dados com o as perguntas.

A professora deverá esclarecer que quando temos situações deste tipo, por exemplo $0,5895$ o número aproximado às milésimas deverá ser $0{,}590$, ou seja, fica o número seguinte ao 89, sendo que é necessário por o 0, dado que queremos uma aproximação às milésimas.

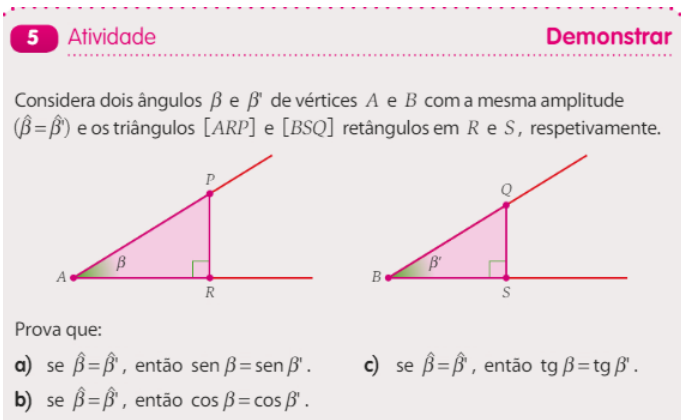
ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que os alunos usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 1 e 5 do caderno de atividades (página 85); exercício 19 da página 53 do manual; exercícios 55, 56 e 57 da página 64 do manual; exercício 9 da página 48 (utilizando a calculadora); exercício 58 da página 64 (utilizando a calculadora). Todos os exercícios que não forem feitos em sala de aula, serão indicados como trabalho para casa, a verificar na aula seguinte.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, recorrentes nas aulas.

ANEXOS:



5 Atividade — Demonstrar

Considera dois ângulos β e β' de vértices A e B com a mesma amplitude ($\hat{\beta}=\hat{\beta}'$) e os triângulos $[ARP]$ e $[BSQ]$ retângulos em R e S, respetivamente.

Prova que:

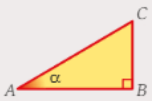
a) se $\hat{\beta}=\hat{\beta}'$, então $\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\beta'$.

b) se $\hat{\beta}=\hat{\beta}'$, então $\cos\beta=\cos\beta'$.

c) se $\hat{\beta}=\hat{\beta}'$, então $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\beta'$.

6 Atividade **Justificar**

Considera um triângulo $[ABC]$ retângulo em B e designa o ângulo interno com vértice em A por α, como sugere a figura.



Justifica que o seno de α e o cosseno de α são números positivos, menores do que 1.

Caderno de Apoio às Metas

7 Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em B, representado na atividade 6.

a) Utilizando as letras da figura, completa:

$\text{tg } \alpha =$ **?**

b) Completa:

- $0 < \text{tg } \alpha < 1$ quando $\overline{BC} < \overline{AB}$.
- $\text{tg } \alpha = 1$ quando **?**
- $\text{tg } \alpha > 1$ quando **?**

9 Consulta a tabela de valores naturais que se encontra na página 144 da Parte 3 do teu manual.

9.1 Indica o valor aproximado às milésimas de:

a) sen 85º

b) tg 63º

c) cos 21º

9.2 Indica um valor aproximado às unidades do ângulo α, tal que:

a) $\text{tg } \alpha = 0{,}869$

b) $\text{sen } \alpha = 0{,}210$

c) $\cos \alpha = 0{,}377$

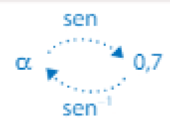
Resolver utilizando a calculadora

8 Atividade **Utilizar a calculadora**

8.1 Determina, arredondado às centésimas:

a) sen 35º

b) o ângulo α, cujo seno é $0{,}7$.



	Determinar sen 35º	Determinar o ângulo agudo α cujo seno é 0,7
Pressiona	SIN 3 5 = (ou, nalgumas calculadoras, 35 sin)	SIN^{-1} 0 · 7 =
Visor	.5735764364	44.427004

Observação: Consulta o manual de instruções da tua calculadora:

- para te assegurares que a calculadora está em MODO GRAU.
- para saber qual é a combinação de teclas que tens de pressionar para obter SIN^{-1}.

As teclas mais frequentes são: SHIFT SIN, 2nd SIN ou INV SIN.

a) sen 35º = 0,57 **b)** α = 44,43º

8.2 Determina com a calculadora o valor arredondado às milésimas de:

a) sen 64º **b)** cos 73º **c)** tg 21,3º

d) sen 45º **e)** cos 60º **f)** tg 30,8º

8.3 Determina o valor de α, arredondado às décimas, tal que:

a) $\text{sen } \alpha = 0{,}531$ **b)** $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ **c)** $\text{tg } \alpha = 3{,}4$

d) $\text{sen } \alpha = 0{,}001$ **e)** $\cos \alpha = 0{,}84$ **f)** $\text{tg } \alpha = 10\,000$

Anexo 15 – Plano da Aula 5

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 28/02/2019 **Ano:** 9.º Turma: B/C **Duração:** 90 minutos

LIÇÃO N.º: 102 e 103

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Razões trigonométricas: calculadora e tabela (continuação).
- Resolver triângulos retângulos.
- Resolução de exercícios e problemas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e resolução de problemas.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Resolução de problemas de contextos de realidade e/ou puramente matemáticos envolvendo as razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas no âmbito da trigonometria dado que se pretende que os alunos se familiarizem com os

problemas desta unidade e consigam ganhar perspicácia e destreza, através da prática dos mesmos.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); tabelas trigonométricas; apresentação PowerPoint.
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)

Formação dos grupos.

2. Razões trigonométricas: Calculadora e Tabela. (20 minutos)
    a. Esclarecimento sobre a utilização da calculadora;
    b. Resolução Atividade 8;
    c. Esclarecimento sobre a utilização da tabela trigonométrica;
    d. Resolução exercício 9.
3. Resolver triângulos retângulos. (20 minutos)
    a. Esclarecimento sobre o cálculo dos elementos de um triângulo retângulo;
    b. Resolução de exercícios;
    c. Apresentação da resolução.
4. Determinar distâncias a locais inacessíveis. (45 minutos)
    a. Resolução de problemas;
    b. Apresentação da resolução.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

O momento 2 apresenta-se repetidos relativamente ao plano anterior uma vez que não foi cumprido, nesse sentido apresentam-se apenas as suas resoluções.

2. Razões trigonométricas: calculadora e tabela. 20 minutos

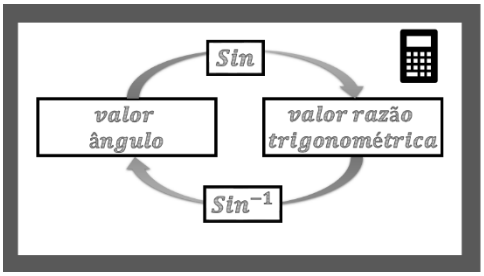
Para este momento a professora utilizará uma apresentação PowerPoint previamente preparada para esta aula.

i. <u>Esclarecimento da utilização da calculadora</u>:

Antes de iniciar, a professora irá confirmar se os alunos têm a opção graus acionada na calculadora. Para isso pedirá aos alunos que calculem a tangente de $45°$. Àqueles alunos que não der o resultado 1, será feita a correção nas definições na calculadora.

Com a ajuda da apresentação *PowerPoint* (Anexo 15.1) a professora fará o esclarecimento da utilização da calculadora, fazemos as seguintes perguntas:

- "Procurem a tecla SIN ou SEN na vossa calculadora. Então vamos lá calcular o $sen\ 35°$"
- "Ou seja, ao conhecer a amplitude do ângulo, descobrimos o valor da razão trigonométrica."
- "Então agora reparem no que está escrito em cima da tecla do seno?" Alguns alunos responderão SIN^{-1} ou SEN^{-1} ou $ARCSEN$ ou $ARCSIN$ pelo que será indicado que estas são todas maneiras válidas de representar a inversa da razão trigonométrica.
- "Se ao saber a amplitude do ângulo, descobrimos o valor da razão usando a tecla SEN, o que acham que poderemos descobrir com a inversa?" Será expetável que os alunos respondam que é o valor da amplitude do ângulo.
- "Então vamos lá determinar qual o ângulo que tem o valor do seno 0,7"
- Para saber qual a combinação de teclas a pressionar para obter SIN^{-1}, a professora poderá indicar as seguintes opções (conforme o modelo da calculadora):
    - SHIFT + SIN
    - 2nd + SIN
    - INV + SIN
- Para concluir, a professora utilizará o esquema seguinte para fazer uma síntese do que foi referido anteriormente, caso seja conhecido o ângulo utilizamos o SIN para descobrir o valor da razão trigonométrica; caso seja conhecido o valor da razão trigonométrica, utilizamos SIN^{-1} para descobrir o valor da amplitude do ângulo.



ii. <u>Resolução:</u>

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Será indicado aos alunos que confirmem os resultados pelas soluções do manual. Caso haja alunos a terminar mais cedo relativamente à grande maioria da turma, será indicado que resolvam o exercício 9 do manual utilizando a calculadora e não a tabela como consta no enunciado.

Atividade 8:

8.1.

a) $sen\ 35° \approx 0{,}57$

b) $sen\ \alpha = 0{,}7, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}7) \approx 44{,}43°$

8.2.

a) $sen\ 64° \approx 0{,}899$

b) $cos\ 73° \approx 0{,}292$

c) $tg\ 21{,}3° \approx 0{,}390$

d) $sen\ 45° \approx 0{,}707$

e) $cos\ 60° \approx 0{,}500$

f) $tg\ 30{,}8° \approx 0{,}596$

8.3.

a) $sen\ \alpha = 0{,}531, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}531) \approx 32{,}1°$

b) $cos\ \alpha = \frac{3}{7}, então\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 64{,}6°$

c) $tg\ \alpha = 3{,}4, então\ \alpha = tg^{-1}(3{,}4) \approx 73{,}6°$

d) $sen\ \alpha = 0{,}001, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}001) \approx 0{,}1°$

e) $cos\ \alpha = 0{,}84, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}84) \approx 32{,}9°$

f) $tg\ \alpha = 10000, então\ \alpha = tg^{-1}(10000) = 90{,}0°$

Exercício 9:

9.1.

a) $sen\ 85° \approx 0{,}99619 \approx 0{,}996$

b) $tg\ 63° \approx 1{,}96261 \approx 1{,}963$

c) $cos\ 21° \approx 0{,}93358 \approx 0{,}934$

9.2.

a) $tg\ \alpha = 0{,}869, então\ \alpha = tg^{-1}(0{,}869) \approx 41°$

b) $sen\ \alpha = 0{,}210, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}210) \approx 12°$

c) $cos\ \alpha = 0{,}377, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}377) \approx 68°$

iii. Esclarecimento da utilização da tabela:

A professora entregará a tabela com os valores das razões trigonométricas para ângulos com amplitude compreendida entre 1 e 89 e explicará aos alunos como utilizá-la, usando como suporte a apresentação PowerPoint. Para isso, poderá fazer as seguintes perguntas:

- Como é que poderemos descobrir o seno de um ângulo com amplitude 35°?
- Procuramos o número 35 na primeira coluna e depois observamos o valor do seno.
- Reparem nos valores dos graus na tabela? Será possível, através da tabela, calcular o valor do seno de um ângulo com amplitude de, por exemplo, 27,3°?
- *Chamar à atenção dos alunos que a tabela apenas pode ser utilizada se o valor da amplitude ângulo for um número natural entre 1 e 89.*
- *Chamar à atenção dos alunos que a tabela só fornece valores aproximados, sendo que se for pedido o valor exato, a tabela não serve para o efeito.*
- E agora, vamos procurar qual a amplitude do ângulo que tem o valor do cosseno aproximadamente igual a 0,88.

- Vamos à coluna do cosseno e procuramos o valor mais próximo de 0,88 e depois vemos a que amplitude do ângulo corresponde.

Depois do breve esclarecimento, discutir as vantagens e desvantagens da utilização da tabela. Relativamente às desvantagens, poderá ser indicado aos alunos a falta de exatidão ao calcular o valor da amplitude do ângulo, consequência de na tabela apenas constarem amplitudes naturais.

A professora poderá aproveitar o momento para fazer referência à origem da tabela e da sua utilidade numa época em que não existia a calculadora.

Chamar-se-á à atenção dos alunos que deverão utilizar a tabela sempre que não for permitido o uso de calculadora.

iv. Resolução do exercício 9 da página 48:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Será indicado que os alunos realizem "trabalho autónomo", expressão utilizada pela professora responsável pela turma que significa que os alunos vão resolvendo os exercícios e confirmando os resultados nas soluções do manual. Caso a sua solução não coincida com a do manual, o aluno deverá chamar pela professora afim de clarificar a sua dúvida.

Estes exercício e atividade deverão ser resolvidos com recurso à tabela trigonométrica, para que os alunos se familiarizem com a sua utilização, e deverão comparar a resolução feita com aquilo que fizeram com o auxílio da calculadora científica.

Caso seja necessário, a professora chamará à atenção para a correta utilização da notação matemática, nomeadamente em relação aos símbolos de " $\approx$ " e " $=$ ".

3. Resolver triângulos retângulos – 20 minutos

i. Esclarecimento:

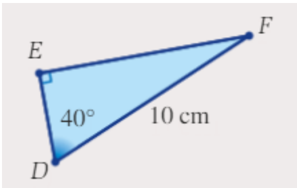
A professora pedirá que alunos abram o manual na página 49 e começará por explicar o que é isto do "Resolver triângulos retângulos".

- A professora indicará aos alunos que: "Resolver um triângulo retângulo é determinar o valor dos seus elementos."

– De seguida perguntará se algum dos alunos sabe o que são os elementos de um triângulo. Para ajudar, a professora poderá dizer que são seis os elementos de um triângulo.

– Depois de uma possível discussão, a professora referirá que os seis elementos do triângulo são os seus três ângulos e os três lados.

– De seguida, a professora desenhará no quadro o seguinte triângulo e fará as seguintes perguntas:



Calcula $\overline{EF}$, arredondado às décimas.

– Quais são os dados do problema?
  - $E\widehat{D}F = 40°$
  - $\overline{DF} = 10\ cm$
  - O triângulo é retângulo em E.

– O que representa $\overline{DF}$ no triângulo?
  - A medida de comprimento hipotenusa

– E porque é que dizem que é a hipotenusa?
  - Porque é o lado do triângulo oposto ao ângulo reto.

– O que queremos determinar?
  - $\overline{EF}$

– O que representa $\overline{EF}$ no triângulo?
  - Cateto oposto ao ângulo em D.

– O que posso usar para determinar o valor de $\overline{EF}$?
  - A trigonometria.

– Que razão trigonométrica relaciona o cateto oposto ao ângulo dado com a hipotenusa?
  - O seno

Assim, a professora escreverá no quadro (pedindo a participação dos alunos)

$$-sen\ 40° = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} \Leftrightarrow sen\ 40° = \frac{\overline{EF}}{10} \Leftrightarrow \overline{EF} = 10 \times sen\ 40°$$

–Utilizando a calculadora, $\overline{EF} \approx 6{,}4\ cm$

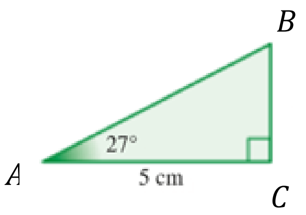
Para concluir, a professora indicará as três perguntas-chaves, também indicadas no manual, que os alunos devem fazer para a resolução dos exercícios e problemas que envolvem a trigonometria:

–Quais são os dados do problema?

–O que queremos determinar?

–Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com aquilo que pretendo saber?

Caso a professora note que ainda existem dúvidas, percorrerá todos os passos anteriores, mas utilizando o triângulo seguinte:



Calcula $\overline{BC}$ arredondado às décimas.

– Quais são os dados do problema?
  - $B\hat{A}C = 27°$
  - $\overline{AC} = 5\ cm$
  - O triângulo é retângulo em C.
– O que representa $\overline{AC}$ no triângulo?
  - A medida do comprimento cateto adjacente ao ângulo em A
– O que pretendemos calcular?
  - $BC.$
– O que representa $\overline{BC}$ no triângulo?
  - Cateto oposto ao ângulo em A.
– Que razão trigonométrica relaciona o cateto oposto ao ângulo em A com o cateto adjacente ao ângulo em A?
  - A tangente

Assim a professora escreverá no quadro:

– $tg\ 27° = BCAC \Leftrightarrow tg\ 27° = BC5 \Leftrightarrow\ BC = 5 \times tg\ 27°$

– $Utilizando\ a\ calculadora, BC \approx 2{,}5\ cm$

ii. Resolução:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

iii. Apresentação da resolução:

A seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 10 da página 49:

10.1. Resolvido no manual – exemplo.

10.2.

$$cos\ 60° = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow cos\ 60° = \frac{6}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} \times cos\ 60° = 6 \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6}{cos\ 60°}$$
$$\Leftrightarrow\ \overline{BC} = 12\ cm$$

R: O comprimento *BC* tem 12 cm.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- preencher os espaços em branco através da observação da figura;
- saber que valor introduzir na calculadora de forma a obter o resultado pretendido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "Então, olhando para o triângulo, qual é o comprimento do lado *BC*?"; "Quanto é o cosseno de 60º?"; "Como posso calcular esse comprimento?"; "Depois de calcular o cosseno de 60º, o exercício está terminado?"; "O que é preciso fazer mais?".

10.3.

$$tg\ 30° = \frac{\overline{ML}}{\overline{KL}} \Leftrightarrow tg\ 30° = \frac{\overline{ML}}{5} \Leftrightarrow tg\ 30°\ \times 5 = \overline{ML},$$
$$então\ \ \overline{ML} \approx 2{,}89\ m$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar o $\overline{ML}$;
- determinar $tg\ 30°$;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que:

- os alunos leiam a sugestão apresentada pelo manual para começar a responder à pergunta;
- os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar $\overline{ML}$?"; "Se 5 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor da tangente de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".
- o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

10.4.a) Resolvido no manual – exemplo.

b)

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 7^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 85 \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{85}, então\ \overline{AC} \approx 9{,}2\ cm,$$

$$\overline{AC} > 0, porque\ \text{é}\ uma\ medida\ de\ comprimento$$

Pela trigonometria:

Pela alínea anterior $\hat{A} \approx 40{,}6°$, então:

$$sen\ 40{,}6° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow sen\ 40{,}6° = \frac{6}{\overline{AC}} \Leftrightarrow sen\ 40{,}6° \times \overline{AC} = 6 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{6}{sen\ 40{,}6°}, \qquad então\ \overline{AC} \approx 9{,}2\ cm$$

Ou:

$$cos\ 40{,}6° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow cos\ 40{,}6° = \frac{7}{\overline{AC}} \Leftrightarrow cos\ 40{,}6° \times \overline{AC} = 7 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7}{cos\ 40{,}6°}, \qquad então\ \overline{AC} \approx 9{,}2\ cm$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- mobilizar corretamente o Teorema de Pitágoras;
- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar o $\overline{AC}$;
- determinar sen/cos 40,6°;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que:

- os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".
- observem os exercícios anteriores a fim de entenderem o raciocino envolvido.

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar $\overline{AC}$?"; "Se $\overline{AC}$ está a dividir como passa para o outro membro da equação?"; "Depois dessa passagem, já está isolado?"; "O que é preciso fazer de seguida?"

A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor do cosseno (e seno) de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".

– o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

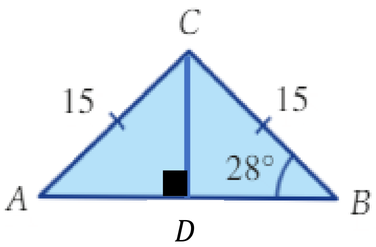
Exercício 13 da página 50:

Uma vez que o triângulo é isósceles, o ângulo B tem a mesma amplitude que o ângulo A, *logo*, $\hat{A} = 28°$ (porque num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais). Dado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, temos $\hat{C} = 180° - 2 \times 28° = 124°$.

A professora deverá ressalvar que este não é um triângulo retângulo, logo as razões trigonométricas não se podem aplicar. E poderá questionar: "Mas será que conseguimos, à custa dele obter um triângulo retângulo?" Sim, basta traçar uma perpendicular ao lado $[AB]$ a partir do vértice C, assim:

$$cos\ 28° = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AD} = 15 \times cos\ 28°, \qquad então\ \overline{AD} \approx 13{,}2442$$

$$\overline{AB} = 2 \times \overline{AD} \approx 2 \times 13{,}2442 \approx 26{,}488 \approx 26{,}5$$



R: $\overline{AB}$ mede aproximadamente $26{,}5$ centímetros.

Dificuldades:

O aluno poderá aplicar as razões trigonométricas ou o Teorema de Pitágoras sem verificar se o triângulo é retângulo.

O aluno poderá não conseguir concluir que se o triângulo é isósceles, então a amplitude do ângulo no vértice B é igual à amplitude do ângulo no vértice A; não se recordar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a $180°$.

O aluno poderá ter dificuldades em:

- identificar um triângulo retângulo no triângulo dado inicialmente e poderá não perceber que $\overline{AD} = \overline{DB}$;
- perceber que razão trigonométrica deverá utilizar tendo em conta os dados do problema e ainda ao resolver a equação;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá relembrar aos alunos que num triângulo isósceles, existem dois lados com mesmo comprimento, aos quais se opões dois ângulos com a mesma amplitude. De seguida poderá perguntar: "Se a amplitude do ângulo em B é $28°$ e em A também, então como iremos descobrir a amplitude do ângulo em C?" Caso os alunos não se recordem, a professora poderá ainda perguntar: "Qual a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo?"

Caso os alunos tenham dificuldade na escolha da razão trigonométrica, a professora deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

Caso os alunos estejam a aplicar as razões trigonométricas ao triângulo isósceles, a professora poderá perguntar aos alunos, umas das primeiras condições referidas no início da lecionação da trigonometria, e esperar que sejam os alunos a responder: "Só podemos calcular as razões trigonométricas em triângulos retângulos".

Caso os alunos não estejam a conseguir identificar um triângulo retângulo, a professora o desenhará no quadro, indicando aos alunos que devem traçar uma perpendicular a um dos lados convenientes do triângulo.

3. Determinar distâncias a locais inacessíveis – 45 minutos

i. Resolução:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão:

Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 14 da página 51 (Anexo 6):

14.1.

$$tg\ 40° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow tg\ 40° = \frac{\overline{CB}}{100} \Leftrightarrow \overline{CB} = tg\ 40° \times 100,\ \ então\ \overline{CB} \approx 83{,}90996 \approx 84\ m$$

R: O rio tem aproximadamente 84 metros de largura.

É importante que a professora chame à atenção dos alunos que, uma vez que todos os vértices da figura estão nomeados, o lado que queremos saber deverá ficar designado com as letras do triângulo.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar o $\overline{CB}$;
- determinar $tg\ 40°$;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar $\overline{CB}$?"; "Se 100 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor do cosseno (e seno) de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".
- o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.2.a)

$$sen\ 20° = \frac{a}{400} \Leftrightarrow sen\ 20° \times 400 = a, \qquad então\ a \approx 136{,}80806 \approx 136{,}8\ m$$

R: Atinge aproximadamente 136,8 metros de altura.

b)

$$cos\ 20° = \frac{d}{400} \Leftrightarrow cos\ 20° \times 400 = d,$$

$$então\ d \approx 375{,}87705 \approx 375{,}9\ m$$

R: A distância d mede aproximadamente $375{,}9\ m$.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar $sen\ 20°$;
- arredondar às casas decimais pedidas.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 400 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor do cosseno (e seno) de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".
- o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.3.

$$d^2 = 400^2 - 136{,}8^2 \Leftrightarrow d^2 = 141285{,}76 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{141285{,}76} \Leftrightarrow d = \sqrt{141285{,}76}, \qquad d > 0, porque\ d\ é\ uma\ distância,$$
$$portanto\ d \approx 375{,}9\ m.$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em mobilizar o Teorema de Pitágoras.

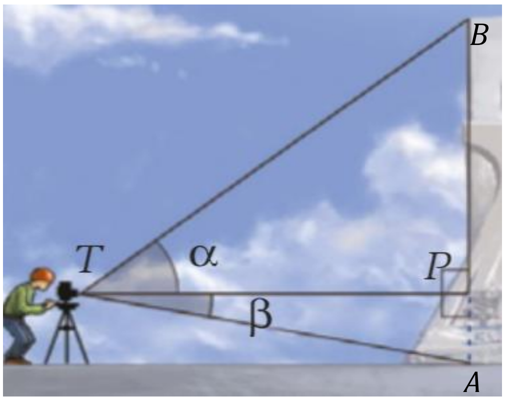
O aluno poderá excluir a solução negativa sem a devida justificação.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá perguntar: "O que enuncia o Teorema de Pitágoras?"; "Como relaciona os lados de um triângulo retângulo?".

A professora deverá relembrar que uma equação da forma $x^2 = a$, com $a > 0$ admite sempre duas soluções, uma positiva e outra negativa, mas, dado que estamos a trabalhar com medidas de comprimento, deverá ser escolhida a positiva, dando esta mesma justificação.

14.4. Façamos a representação dos triângulos à parte, atribuindo nomes aos vértices:



$\alpha = 39°;\ \beta = 9°;\ \overline{PT} = 60m$

$$tg\ \alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 39° = \frac{\overline{PB}}{60} \Leftrightarrow 60 \times tg\ 39° = \overline{PB},$$
$$então\ \overline{PB} \approx 48{,}587042\ m$$

$$tg\ \beta = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 9° = \frac{\overline{PA}}{60} \Leftrightarrow 60 \times tg\ 9° = \overline{PA},$$
$$então\ \overline{PA} \approx 9{,}503066\ m$$

Então a altura do padrão dos descobrimentos é aproximadamente $\overline{PB} + \overline{PA} \approx 48{,}587042 + 9{,}503066 \approx 58{,}090108 \approx 58{,}09m.$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual razão trigonométrica relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido.;
- compreender que a altura do monumento é obtida através da soma de $\overline{BP}$ com $\overline{PA}$;
- perceber quantas casas decimais deverá usar nos cálculos intermédios;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar as tangentes;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que:

- os alunos nomeiem todos os vértices dos triângulos na figura, para mais facilmente serem designados os lados dos mesmos;
- sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "A altura do monumento é dada por que comprimento?"; "Como é que vou obter esse comprimento?".

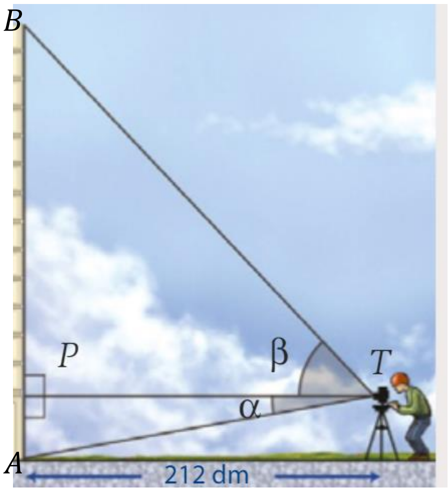
A professora deverá indicar aos alunos que nos cálculos intermédios deixem sempre mais duas casas decimais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, assim, se para o resultado final pedem em décimas, os alunos deverão nos cálculos intermédios arredondar às milésimas. Isto se no enunciado não existir essa referência.

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 60 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.5. Façamos a representação dos triângulos à parte, atribuindo nomes aos vértices:

$\hat{\alpha} = 16{,}5°;\ \hat{\beta} = 58{,}8°;\ \overline{PT} = 212\ dm$



$$tg\ \alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 16{,}5° = \frac{\overline{PA}}{212}$$
$$\Leftrightarrow 212 \times tg\ 16{,}5° = \overline{PA},$$
$$então\ \overline{PA} \approx 62{,}797\ dm$$

$$tg\ \beta = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 58{,}8° = \frac{\overline{PB}}{212}$$
$$\Leftrightarrow 212 \times tg\ 58{,}8° = \overline{PB},$$
$$então\ \overline{PB} \approx 350{,}054\ dm$$

Então a altura do edíficio é aproximadamente $\overline{PA} + \overline{PB} \approx 62{,}797 + 350{,}054 \approx 412{,}851 \approx 412{,}9\ dm.$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual razão trigonométrica relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- compreender que a altura do monumento é obtida através da soma de dois cálculos envolvendo razões trigonométricas;
- perceber quantas casas decimais deverá deixar nos cálculos intermédios;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar as tangentes;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que:

- os alunos nomeiem todos os vértices dos triângulos na figura, para mais facilmente serem designados os lados dos mesmos;
- sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos

determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "A altura do monumento é dada por que comprimento?"; "Como é que vou obter esse comprimento?".

A professora deverá indicar aos alunos que nos cálculos intermédios deixem sempre mais duas casas decimais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, assim, se para o resultado final pedem em décimas, os alunos deverão, nos cálculos intermédios, arredondar às milésimas. Isto se no enunciado não existir essa referência.

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 212 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.6.

a)

$$\begin{cases} tg\ 16° = \frac{h}{x+100} \\ tg\ 22° = \frac{h}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ 16°\ (100+x) = h \\ h = x \times tg\ 22° \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} tg\ 16°(100+x) = x \times tg\ 22° \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100tg\ 16° + x \times tg\ 16° = x \times tg\ 22° \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100tg\ 16° = x(tg\ 22° - tg\ 16°) \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{100tg\ 16°}{tg\ 22° - tg\ 16°}, \\ - \end{cases} \qquad então x \approx 245{,}2991;\ h \approx 99{,}101$$

A altura da montanha relativamente ao solo: $h + 1{,}5 \approx 100{,}601\ metros$

R: A altura da montanha relativamente ao nível do solo é aproximadamente 100,601 metros.

b)

Basta somar $700m$ ao resultado obtido na alínea anterior.

Então, a altura da montanha em relação ao nível do mar é $100{,}601 + 700 \approx 800{,}601m$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual razão trigonométrica relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- compreender que a altura da montanha relativamente ao nível do solo é dada através da soma entre h e 1,5 $metros$;
- perceber o que a altura da montanha relativamente ao nível do mar é dada através da soma do valor obtido na alínea anterior com os 700 $metros$;
- resolver o sistema de duas equações, utilizando o método da substituição;
- determinar as tangentes;
- arredondar às casas decimais pedidas e não utilizar o valor arredondado às milésimas para as razões trigonométricas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "A altura da montanha é dada por que comprimento?"; "Como é que vou obter esse comprimento?".

A professora deverá referir que a altura relativamente ao solo é a contar a partir do chão, e, portanto, neste caso deverá somar-se 1,5 ao resultado final na alínea a); enquanto que na alínea b), para além dos 1,5 metros, deverá somar-se os 700 metros de altitude referidos nessa mesma alínea.

A professora poderá indicar aos alunos que escrevam as razões trigonométricas para um dos triângulos. De seguida poderá perguntar quantas incógnitas a expressão tem. Pelo facto de ter duas incógnitas, deverá perguntar aos alunos quantas equações são necessárias para determinar os seus valores. Posteriormente, a professora poderá indicar aos alunos que tenham em contra o outro triângulo e que escrevam a equação para calcular o valor de h. Por fim, a professora relembrará que se trata da resolução de um sistema e, caso note que a maioria dos alunos não o sabem resolver, resolverá em grupo turma.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

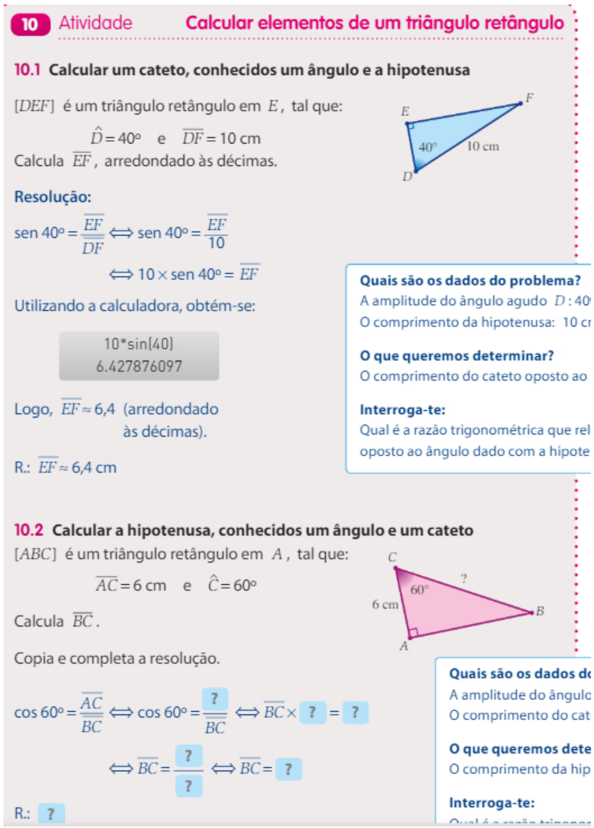
Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 19 ao 28 das páginas 53 e 54; exercícios 58 ao 71 das páginas 65 e 66.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, recorrentes nas aulas

<u>Será indicado a resolução do exercício 13, página 50 do manual, para trabalho de casa, a realizar numa folha à parte para feedback</u>, bem como o resto das alíneas da atividade 14 que não sejam resolvidas em sala de aula.

ANEXOS:



10 Atividade — Calcular elementos de um triângulo retângulo

10.1 Calcular um cateto, conhecidos um ângulo e a hipotenusa

$[DEF]$ é um triângulo retângulo em E, tal que:

$\hat{D} = 40^\circ$ e $\overline{DF} = 10$ cm

Calcula $\overline{EF}$, arredondado às décimas.

Resolução:

$\text{sen } 40^\circ = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} \Leftrightarrow \text{sen } 40^\circ = \frac{\overline{EF}}{10}$

$\Leftrightarrow 10 \times \text{sen } 40^\circ = \overline{EF}$

Utilizando a calculadora, obtém-se:

10*sin(40)
6.427876097

Logo, $\overline{EF} \approx 6{,}4$ (arredondado às décimas).

R.: $\overline{EF} \approx 6{,}4$ cm

Quais são os dados do problema?
A amplitude do ângulo agudo D: 40
O comprimento da hipotenusa: 10 c

O que queremos determinar?
O comprimento do cateto oposto ao

Interroga-te:
Qual é a razão trigonométrica que rel
oposto ao ângulo dado com a hipote

10.2 Calcular a hipotenusa, conhecidos um ângulo e um cateto

$[ABC]$ é um triângulo retângulo em A, tal que:

$\overline{AC} = 6$ cm e $\hat{C} = 60^\circ$

Calcula $\overline{BC}$.

Copia e completa a resolução.

$\cos 60^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{?}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} \times ? = ?$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{?}{?} \Leftrightarrow \overline{BC} = ?$

R.: ?

Quais são os dados d
A amplitude do ângulo
O comprimento do cat

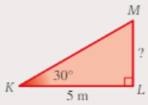
O que queremos dete
O comprimento da hip

Interroga-te:

10.3 Calcular um cateto, conhecidos um ângulo e o outro cateto

$[KLM]$ é um triângulo retângulo em L, tal que:

$$\hat{K} = 30^\circ \quad \text{e} \quad \overline{KL} = 5 \text{ m}$$



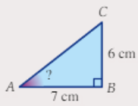
Calcula $\overline{ML}$, arredondado às centésimas.

Sugestão:
Começa por responder às questões:
- Quais são os dados do problema?
- O que queres determinar?
- Qual é a razão trigonométrica que relaciona o cateto oposto ao ângulo dado com o cateto adjacente?

10.4 Calcular os ângulos de um triângulo, conhecidos dois dos seus lados

$[ABC]$ é um triângulo retângulo em B, tal que:

$\overline{AB} = 7$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm



a) Calcula os valores de $\hat{A}$ e de $\hat{C}$, arredondados às décimas.

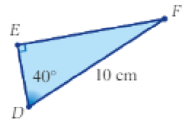
No triângulo retângulo $[ABC]$:

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{6}{7}$$

Para determinar o ângulo agudo cuja tangente é $\frac{6}{7}$,

tan⁻¹[6/7]

11 Considera o $\Delta[DEF]$ representado na figura:



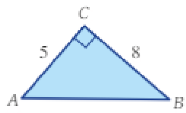
Atendendo aos dados da figura, calcula:

a) $\overline{ED}$, arredondado às décimas.

b) $\hat{F}$

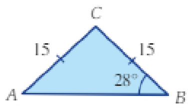
12 $[ABC]$ é um triângulo retângulo em C.

As medidas estão em metros.



Atendendo aos dados da figura, determina as medidas dos restantes elementos do triângulo.

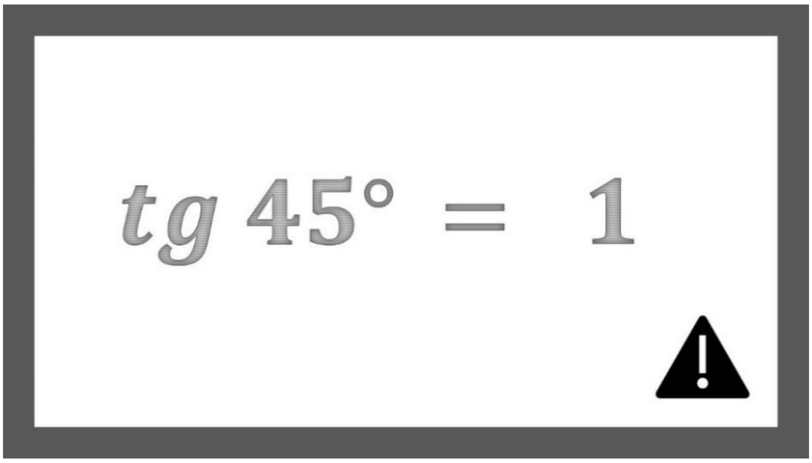
13 $[ABC]$ é um triângulo isósceles.

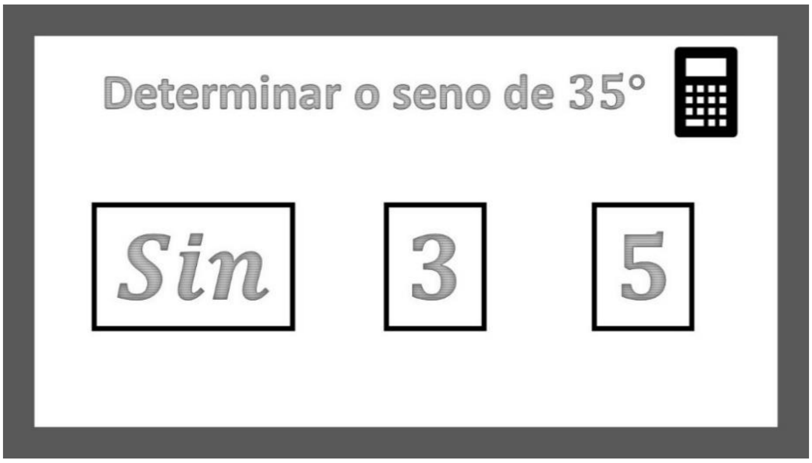


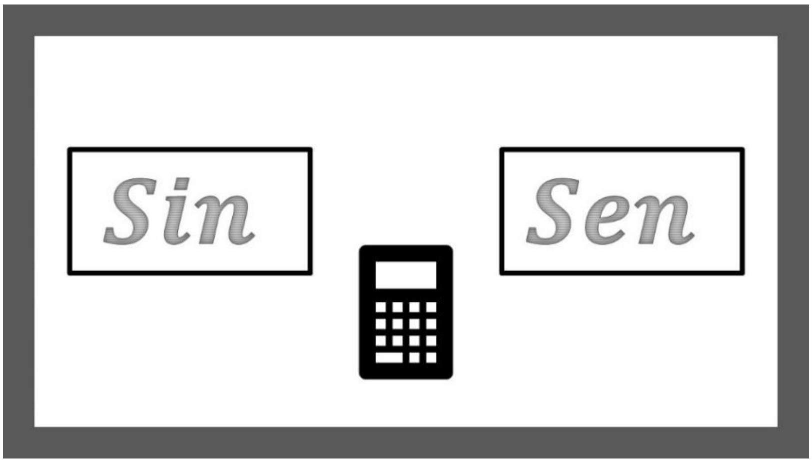
As medidas estão em centímetros.

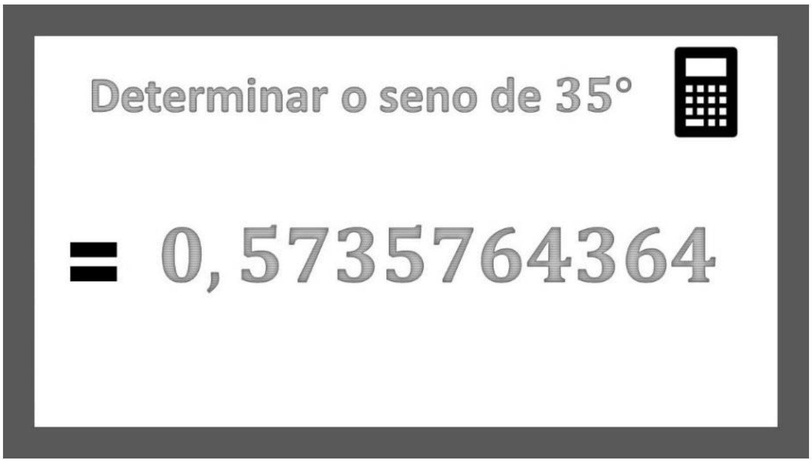
Determina $\overline{AB}$, arredondado às décimas, e as amplitudes dos ângulos A e C.

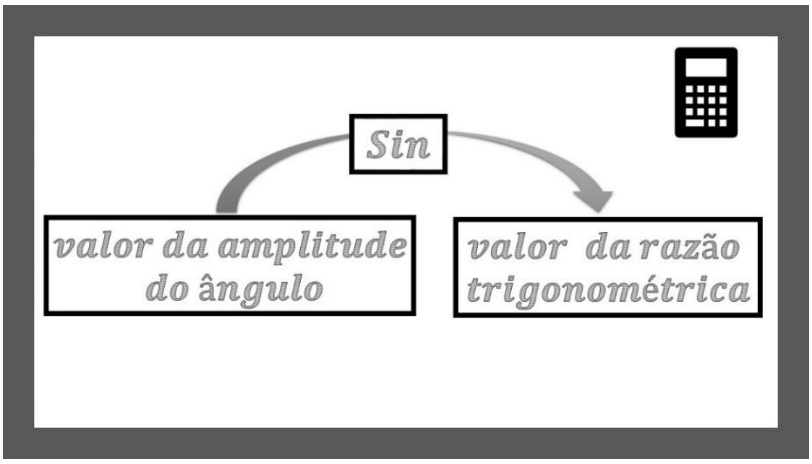
Anexo 15.1 – Diapositivos da Aula 5

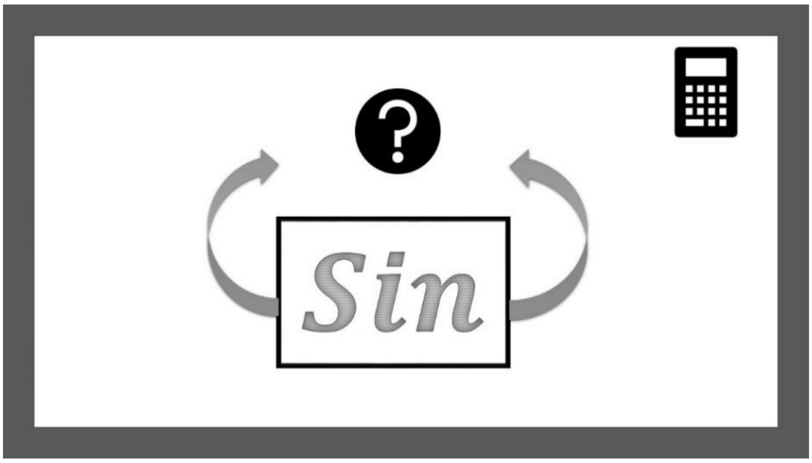


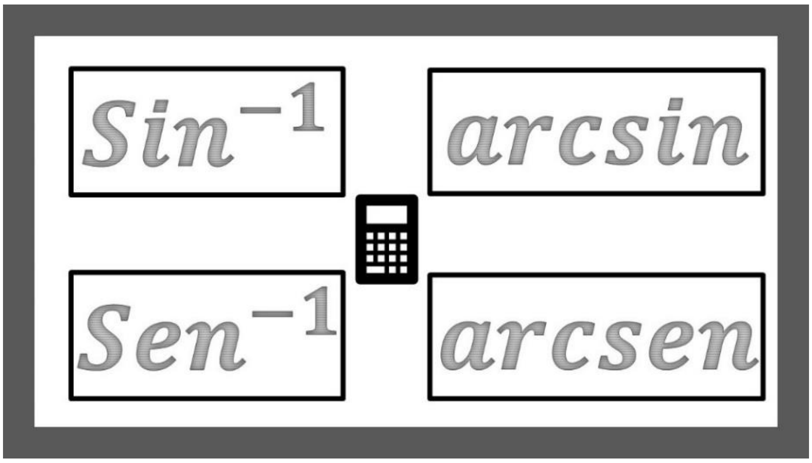


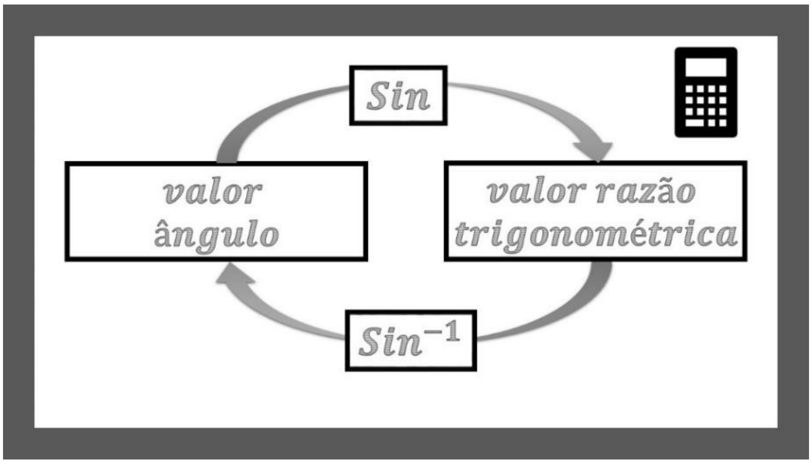

Sin
Sen

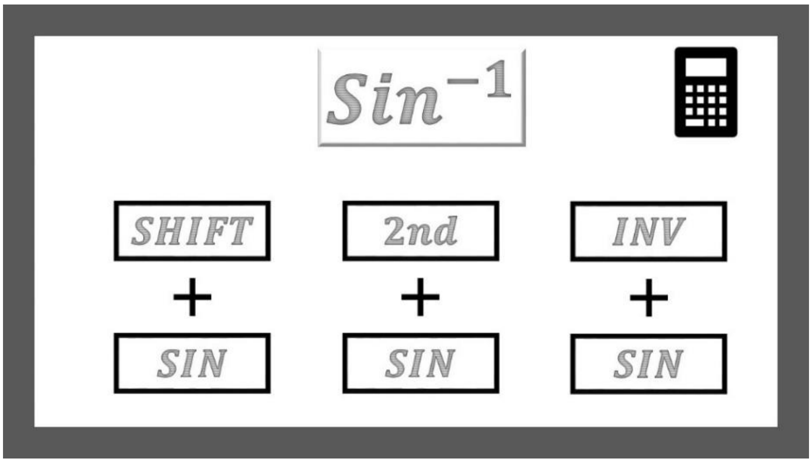

Determinar o seno de 35°
= 0,5735764364

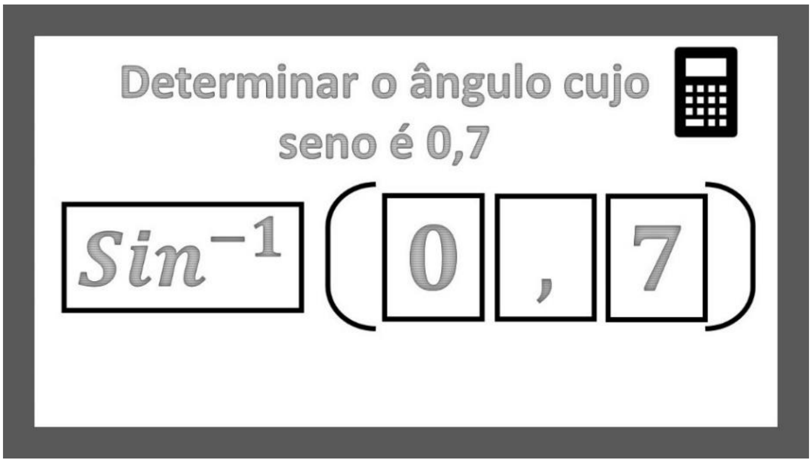

Sin
valor da amplitude do ângulo
valor da razão trigonométrica

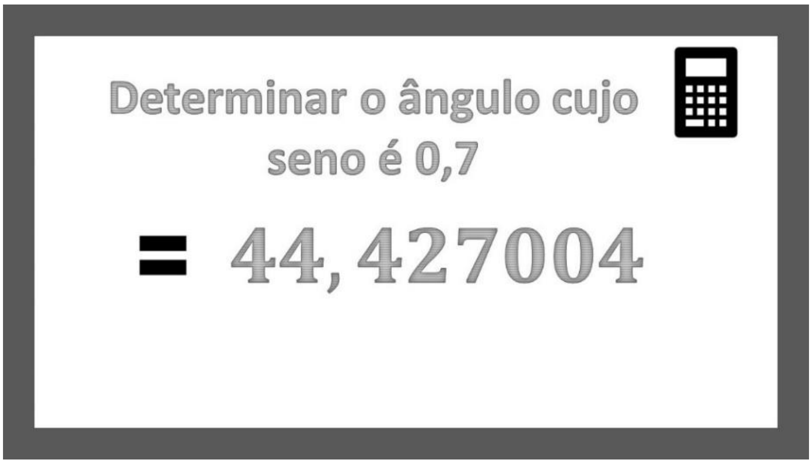

Sin

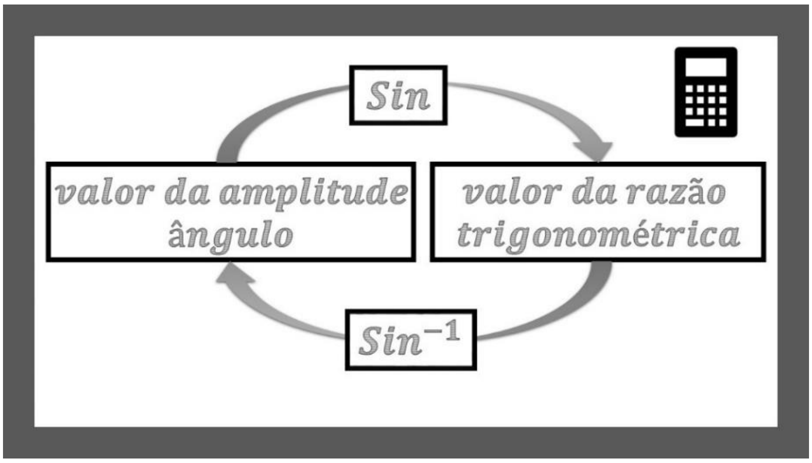

Sin^{-1}
arcsin
Sen^{-1}
arcsen

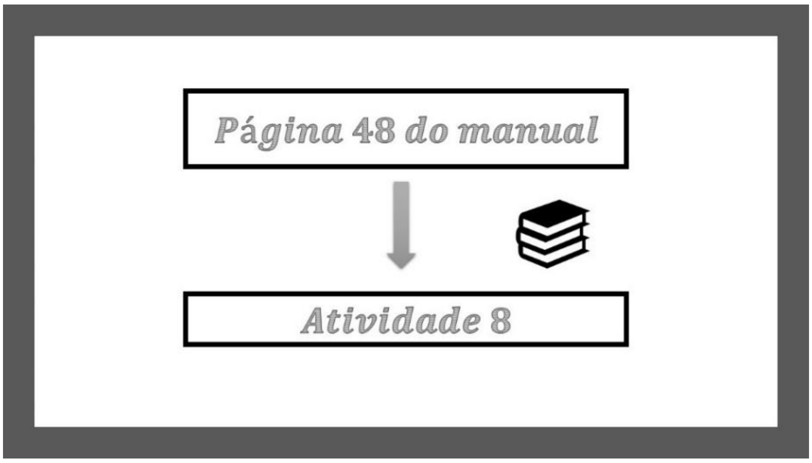

Sin
valor ângulo
valor razão trigonométrica
Sin^{-1}


Sin^{-1}
SHIFT + SIN
2nd + SIN
INV + SIN


Determinar o ângulo cujo seno é 0,7
Sin^{-1} (0 , 7)


Determinar o ângulo cujo seno é 0,7
= 44,427004


Sin
valor da amplitude ângulo
valor da razão trigonométrica
Sin⁻¹


Página 48 do manual
Atividade 8

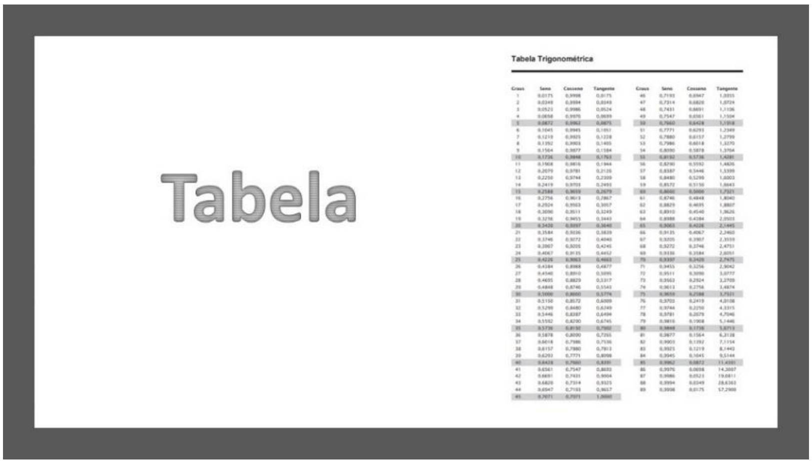
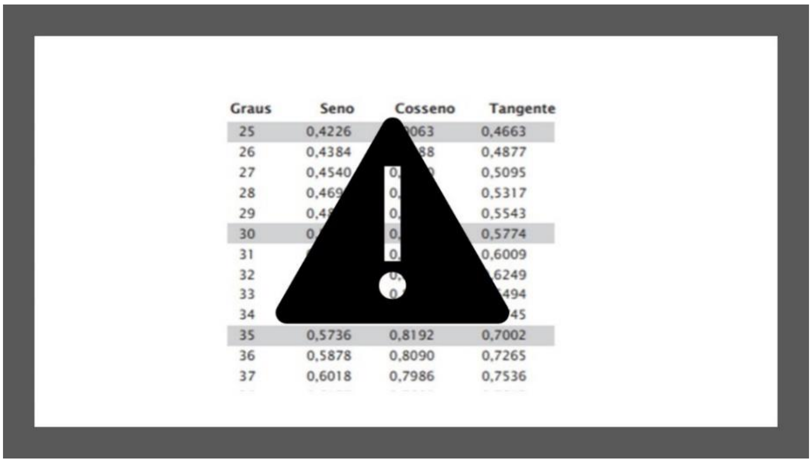


Tabela
Tabela Trigonométrica

Determinar o valor do seno de um ângulo de 35°

Graus	Seno	Cosseno	Tangente
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536

Determinar o valor do seno de um ângulo com amplitude 27, 3°



Graus	Seno	Cosseno	Tangente
25	0,4226	[illegible]	0,4663
26	0,4384	[illegible]	0,4877
27	0,4540	[illegible]	0,5095
28	[illegible]	[illegible]	0,5317
29	[illegible]	[illegible]	0,5543
30	[illegible]	[illegible]	0,5774
31	[illegible]	[illegible]	0,6009
32	[illegible]	[illegible]	[illegible]
33	[illegible]	[illegible]	[illegible]
34	[illegible]	[illegible]	[illegible]
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536

A tabela apenas pode ser utilizada se o valor da amplitude do ângulo for um número natural entre 1 e 89.

Determinar a amplitude do ângulo cujo cosseno é aproximadamente $0,88$.

Graus	Seno	Cosseno	Tangente
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536

Anexo 16 – Plano da Aula 6

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 11/03/2019 **Ano:** 9.º Turma: B/C **Duração:** 45 minutos

LIÇÃO N.º: 104

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Determinar distâncias a locais inacessíveis.
- Resolução de exercícios e problemas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e resolução de problemas.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo individual; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Resolução de problemas de contextos de realidade e/ou puramente matemáticos envolvendo as razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas no âmbito da trigonometria dado que se pretende que os alunos se familiarizem com os

problemas desta unidade e consigam ganhar perspicácia e destreza, através da prática dos mesmos.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro);
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e/ou tabela trigonométrica.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
2. Determinar distâncias a locais inacessíveis: (40 minutos)
   i. Resolução de problemas;
   ii. Apresentação da resolução.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Este é o momento de registar o sumário e as eventuais faltas dos alunos.

A professora recolherá as resoluções referentes ao TPC (exercício 13).

O momento 2 apresenta-se repetido relativamente ao plano anterior uma vez que não foi cumprido, nesse sentido apresentam-se apenas as suas resoluções.

2. Determinar distâncias a locais inacessíveis 40 minutos

i. <u>Resolução</u>:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. <u>Apresentação da resolução e discussão</u>:

Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 14 da página 51 (Anexo 6):

14.1.

$$tg\ 40° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow tg\ 40° = \frac{\overline{CB}}{100} \Leftrightarrow \overline{CB} = tg\ 40° \times 100,\ \ então\ \overline{CB} \approx 83{,}90996 \approx 84\ m$$

R: O rio tem aproximadamente 84 metros de largura.

14.2.a)

$$sen\ 20° = \frac{a}{400} \Leftrightarrow sen\ 20° \times 400 = a, \qquad então\ a \approx 136{,}80806 \approx 136{,}8\ m$$

R: Atinge aproximadamente 136,8 metros de altura.

b)

$$cos\ 20° = \frac{d}{400} \Leftrightarrow cos\ 20° \times 400 = d,$$

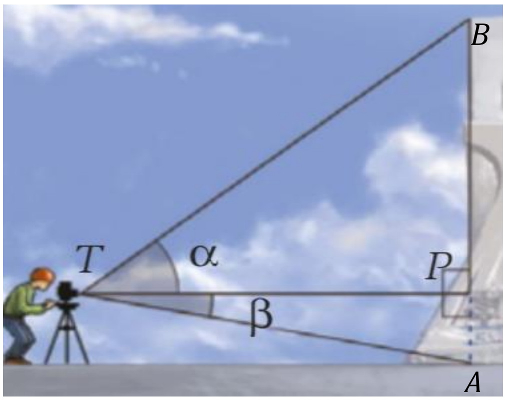
$$então\ d \approx 375{,}87705 \approx 375{,}9\ m$$

R: A distância d mede aproximadamente $375{,}9\ m$.

14.3.

$$d^2 = 400^2 - 136{,}8^2 \Leftrightarrow d^2 = 141285{,}76 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{141285{,}76} \Leftrightarrow d$$
$$= \sqrt{141285{,}76}, \qquad d > 0, porque\ d\ \text{é}\ uma\ distância,$$
$$portanto\ d \approx 375{,}9\ m.$$

14.4. Façamos a representação dos triângulos à parte, atribuindo nomes aos vértices:



$$\alpha = 39°;\ \beta = 9°;\ \overline{PT} = 60m$$

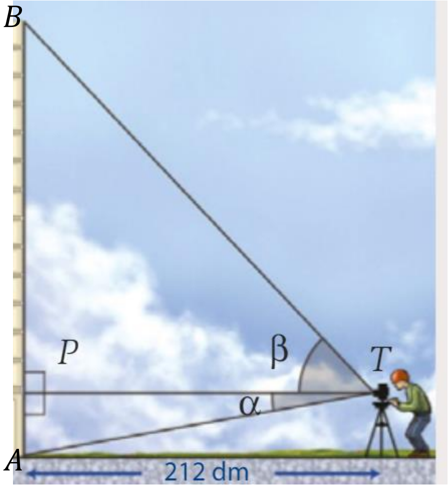
$$tg\ \alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 39° = \frac{\overline{PB}}{60}$$
$$\Leftrightarrow 60 \times tg\ 39° = \overline{PB},$$
$$então\ \overline{PB} \approx 48{,}587042\ m$$

$$tg\ \beta = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 9° = \frac{\overline{PA}}{60}$$
$$\Leftrightarrow 60 \times tg\ 9° = \overline{PA},$$
$$então\ \overline{PA} \approx 9{,}503066\ m$$

Então a altura do padrão dos descobrimentos é aproximadamente $\overline{PB}+\overline{PA}\approx 48{,}587042+9{,}503066\approx 58{,}090108\approx 58{,}09m$.

14.5. Façamos a representação dos triângulos à parte, atribuindo nomes aos vértices:

$\hat{\alpha}=16{,}5°$; $\hat{\beta}=58{,}8°$; $\overline{PT}=212\ dm$



$$tg\ \alpha=\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}}\Leftrightarrow tg\ 16{,}5°=\frac{\overline{PA}}{212}$$
$$\Leftrightarrow 212\times tg\ 16{,}5°=\overline{PA},$$
$$então\ \overline{PA}\approx 62{,}797\ dm$$

$$tg\ \beta=\frac{\overline{PB}}{\overline{PT}}\Leftrightarrow tg\ 58{,}8°=\frac{\overline{PB}}{212}$$
$$\Leftrightarrow 212\times tg\ 58{,}8°=\overline{PB},$$
$$então\ \overline{PB}\approx 350{,}054\ dm$$

Então a altura do edífício é aproximadamente $\overline{PA}+\overline{PB}\approx 62{,}797+350{,}054\approx 412{,}851\approx 412{,}9\ dm$.

14.6.

a)

$$\begin{cases} tg\ 16°=\frac{h}{x+100} \\ tg\ 22°=\frac{h}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} tg\ 16°\,(100+x)=h \\ h=x\times tg\ 22°\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} tg\ 16°(100+x)=x\times tg\ 22° \\ -\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 100tg\ 16°+x\times tg\ 16°=x\times tg\ 22° \\ -\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 100tg\ 16°=x(tg\ 22°-tg\ 16°) \\ -\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{100tg\ 16°}{tg\ 22°-tg\ 16°}, \\ -\end{cases}\qquad entãox\approx 245{,}2991;\ h\approx 99{,}101$$

A altura da montanha relativamente ao solo: $h+1{,}5\approx 100{,}601\ metros$

R: A altura da montanha relativamente ao nível do solo é aproximadamente $100{,}601$ metros.

b)

Basta somar $700m$ ao resultado obtido na alínea anterior.

Então, a altura da montanha em relação ao nível do mar é $100{,}601 + 700 \approx 800{,}601m$.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 58 ao 71 das páginas 64, 65 e 66.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá no trabalho individual produzido, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Anexo 17 – Plano da aula 7

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 12/03/2019 **Ano:** 9.º Turma: B/C **Duração:** 90 minutos

LIÇÃO N.º: 105 e 106

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Relações entre razões trigonométricas do mesmo ângulo.
- Resolução de exercícios e problemas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações daí decorrentes.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Familiarização com as relações entre as razões trigonométricas (Fórmula Fundamental da Trigonometria, entre outras).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas; Teorema de Pitágoras; operações com frações.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio matemático dado que os alunos irão inferir, com o suporte de uma ficha de trabalho previamente preparada para o efeito, algumas relações entre as razões trigonométricas, nomeadamente a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); fichas de trabalho; apresentação *PowerPoint*;
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e tabelas trigonométricas.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Relações entre as razões trigonométricas: (45 minutos)
   i. Resolução da ficha de trabalho n.º 13;
   ii. Apresentação da resolução;
   iii. Resolução da atividade 29 da página 55;
   iv. Discussão e sistematização de ideias;
3. Resolução de exercícios sobre relações entre as razões trigonométricas: (40 minutos)
   i. No cálculo de determinados valores exatos;
   ii. Na demonstração de algumas relações;
   iii. No cálculo de valores aproximados

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Relação entre as razões trigonométricas. 45 minutos

Será distribuída a ficha n.º 13 (Anexo 5) referente à Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT).

i. <u>Resolução da ficha de trabalho n.º 13</u>: **15 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos, e será realizada uma a uma à medida que a maioria dos alunos for terminando. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

ii. <u>Apresentação da Resolução:</u> **15 minutos**

a) Para um melhor entendimento, vamos indicar aos alunos que numerem os três triângulos, assim o triângulo $[ABC]$ será o 1, o triângulo $[DEF]$ será o 2 e o triângulo $[HIJ]$ o 3.

Triângulo 1

Tem-se $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$ e $\overline{AC}^2 = 17^2 = 289$.

Assim, $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo 1 ($[ABC]$) é retângulo em B.

Triângulo 2

Tem-se $\overline{EF}^2 + \overline{ED}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ e $\overline{DF}^2 = 13^2 = 169$.

Assim, $\overline{EF}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{DF}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo 2 ($[DEF]$) é retângulo em E.

Triângulo 3

Tem-se $\overline{HJ}^2 + \overline{JI}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ e $\overline{HI}^2 = 10^2 = 100$.

Assim, $\overline{HJ}^2 + \overline{JI}^2 = \overline{HI}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo 3 ($[HIJ]$) é retângulo em J.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá considerar que os triângulos são retângulos pela observação do que parece ser um ângulo reto nas figuras.

O aluno poderá ter dificuldades em mobilizar o recíproco do Teorema de Pitágoras.

O aluno poderá confundir o Teorema de Pitágoras com o seu recíproco.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá perguntar: "Quando tenho um triângulo, que conhecimento é que me permite garantir que esse mesmo triângulo é retângulo?" e evidenciar que não existe informação nas figuras que permita assumir que os triângulos possuem um ângulo reto; "Conhecem algum teorema que nos permita concluir que um triângulo é retângulo?"; "Qual o lado poderá ser considerado a hipotenusa? Porquê?".

A professora deverá recordar com os alunos quando é que se usa o Teorema de Pitágoras ou o seu recíproco: o Teorema só pode ser aplicado quando sabemos que o triângulo é retângulo, enquanto que o seu recíproco permite garantir isso mesmo.

b) Determina as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de cada um dos ângulos assinalados na figura.

Triângulo 1

$$sen\alpha = \frac{8}{17}; cos\alpha = \frac{15}{17}; tg\alpha = \frac{8}{15}.$$

Triângulo 2

$$sen\beta = \frac{12}{13}; cos\beta = \frac{5}{13}; tg\beta = \frac{12}{5}.$$

Triângulo 3

$$sen\gamma = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; cos\gamma = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; tg\gamma = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

- Compara o valor da razão tangente com o quociente entre as razões seno e cosseno ângulo. O que verificas?.

Triângulo 1

$$tg\alpha = \frac{8}{15} \; e \; \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \frac{8}{15}$$

Triângulo 2

$$tg\beta = \frac{12}{5} \; e \; \frac{sen\beta}{cos\beta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

Triângulo 3

$$tg\gamma = \frac{3}{4}\ e\ \frac{sen\gamma}{cos\gamma} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Conseguimos perceber que o valor da tangente é igual ao quociente entre os valores do seno e do cosseno do ângulo correspondente.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- mobilizar as razões trigonométricas;
- conseguir traduzir o quociente pedido e, posteriormente, em operar com frações;
- relacionar os valores das razões trigonométricas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os seus registos sobre as razões trigonométricas.

A professora poderá perguntar:

- "Qual é o quociente pedido?"; "Como é que se dividem frações?".
- "O que acabamos de ver?"; "O quociente entre o seno e cosseno é igual a que valor?".

c) Será apresentada a resolução no quadro o caso do primeiro triângulo, relativamente aos outros triângulos será apenas referido oralmente.

Triângulo 1

Já sabemos que:

$$sen\alpha = \frac{8}{17}; cos\alpha = \frac{15}{17}.$$

Elevando ao quadrado ambos os quocientes:

$$(sen\ \alpha)^2 = \left(\frac{8}{17}\right)^2; (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{15}{17}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{64}{289} + \frac{225}{289} = \frac{289}{289} = 1$$

Triângulo 2

Já sabemos que:

$$sen\,\beta = \frac{12}{13}; cos\,\beta = \frac{5}{13}.$$

Elevando ao quadrado ambos os quocientes:

$$(sen\,\beta)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2; (cos\ \beta)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\,\beta)^2 + (cos\,\beta)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1$$

Triângulo 3

Já sabemos que:

$$sen\,\gamma = \frac{3}{5}; cos\,\gamma = \frac{4}{5}.$$

Elevando ao quadrado ambos os quocientes:

$$(sen\,\gamma)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2; (cos\ \gamma)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\,\gamma)^2 + (cos\ \gamma)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

Nos três triângulos podemos observar que a soma de o quadrado do seno com o quadrado do cosseno é igual a um.

Sistematização:

$-(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$

$-(sen\,\beta)^2 + (cos\,\beta)^2 = 1$

$-(sen\,\gamma)^2 + (cos\ \gamma)^2 = 1$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- elevar ao quadrado cada uma das razões trigonométricas;
- operar com frações, nomeadamente em calcular as potências e a sua soma;
- relacionar os quadrados do seno e do cosseno.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "$\left(\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{8^2}{17}$?"; "Que cuidado devo ter para garantir que toda a fração elevada a 2?".

- “Como é que somam frações?”; “Como devemos proceder para conseguir somar as frações?”.
- “O que conseguimos concluir com estes três cálculos?”

iii. <u>Resolução da atividade 29 da página 55:</u> **10 minutos**

A professora utilizará esta tarefa para generalizar aquilo que foi visto na ficha de trabalho, realizando-a em grande grupo com os alunos e apoiando-se numa apresentação PowerPoint. Depois deste momento, será entregue aos alunos a resolução da atividade para colarem no caderno diário.

a)

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a}$$
$$cos\ \alpha = \frac{c}{a}$$
$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$
$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$
$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2}$$
$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

A professora deverá chamar à atenção que existe um passo intermédio que o manual não considera:

$$sen^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \qquad cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Perceber qual é a razão que traduz o seno e o cosseno de alfa;
- Compreender que deverá elevar ao quadrado cada uma das razões escritas anteriormente, e uma vez que se trata de uma fração, que deverá elevar ao quadrado tanto o numerador como o denominador;
- Conseguir escrever com o mesmo denominador o segundo membro da equação e

- Relacionar o que escreveu com o Teorema de Pitágoras e tendo em conta o triângulo representado.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá sugerir aos alunos que, para além de lerem o texto referente a cada uma das passagens da demonstração:

- Observem o triângulo apresentado, verificando qual é o ângulo cujas razões trigonométricas são as pedidas e, se necessário, que consultem os registos que têm no caderno diário sobre as razões trigonométricas;
- Atentem para o primeiro membro da equação verificando o que se fez. A professora poderá perguntar: "Como se obtém o primeiro membro a partir de $sen\ \alpha$ e $cos\ \alpha$?"; "Tendo em conta isto, o que deverei escrever no segundo membro?"; "Como se calcula uma potência de uma fração?".

Neste momento a professora deverá chamar à atenção de toda a turma a importância da colocação dos parêntesis porque esse cuidado evita erros desnecessários. A professora poderá dar um exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq \frac{2^2}{3}$.

- Adicionem ambas as frações, para isso a professora poderá questionar: "Como é que se adicionam frações?"; "Já tenho o mesmo denominador?"; "Se sim, o que preciso de fazer agora?";
- Apliquem o Teorema de Pitágoras. Caso os alunos não o consigam mobilizar, e se a professora achar necessário, recordá-lo-á em grande grupo. A professora poderá perguntar: "O que refere o Teorema de Pitágoras?"; "Então, já sei que o quadrado do comprimento hipotenusa é igual à soma do quadrado do comprimento dos catetos. Quais são os catetos e a hipotenusa neste triângulo?"; "Já consigo relacionar isso com a fração que tenho escrita?".

b) Pelas definições das razões trigonométricas, tem-se:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a};\ cos\ \alpha = \frac{c}{a} \text{ e } tg\ \alpha = \frac{b}{c}.$$

Portanto:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\alpha$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender que como esta tarefa é uma demonstração, que o resultado que queremos provar já está lá escrito e não pode ser utilizado, deverá sim, ser deduzido.
- perceber como deverá começar a demonstração.
- operar com frações, principalmente na operação divisão.

O aluno poderá ainda não:

- conseguir mobilizar as definições das razões trigonométricas ou associar que as definições das razões trigonométricas são o seno, cosseno e tangente de um ângulo.
- compreender que escrever as razões trigonométricas deverá utilizar o triângulo apresentado inicialmente.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá começar por mencionar que esta tarefa é uma demonstração (como aparece em letras cor-de-rosa no canto da mesma), e, portanto, queremos provar que este resultado é verdadeiro, não o podendo assumir como tal, logo não o podemos utilizar na própria demonstração.

A professora poderá perguntar: “O que queremos provar?”; “Então vamos seguir a sugestão do livro e aplicar as definições das razões trigonométricas, que são?”.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos que têm no caderno diário sobre as razões trigonométricas afim das conseguirem mobilizar.

A professora poderá questionar:

- “Já sabemos que o seno de um ângulo é o quociente entre a medida do comprimento do cateto oposto a esse ângulo e a medida do comprimento da hipotenusa, então, qual o cateto oposto ao ângulo alfa e qual é a hipotenusa?”; “Qual é a sua medida comprimento?”. (Analogamente para as restantes razões trigonométricas).
- “Como é que podemos dividir frações?”. A professora poderá ainda recordar como se procede nessa operação.

iv. <u>Discussão e sistematização de ideias</u> **5 minutos**

Este momento servirá para que os alunos assentem as ideias relativamente àquilo que esteve a ser trabalhado, para isso, irão registar no caderno diário o seguinte:

Título: Relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo α

Conhecida apenas uma das razões trigonométricas é possível determinar o valor das restantes.

- Relação entre o seno e o cosseno do mesmo ângulo:

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT)

- Relação entre o seno, cosseno e tangente de um mesmo ângulo:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

3. Resolução de exercícios. **40 minutos**

i. Cálculo de determinados valores exatos: **15 minutos**

A professora utilizará o exemplo da página 56 do manual dos alunos para explicar-lhe a importância e utilidade da relação entre as razões trigonométricas. Assim, com o apoio da apresentação PowerPoint, ensinará a calcular os valores exatos de $cos\ \alpha$ e de $tg\ \alpha$, sabendo que α é um ângulo agudo e que $sen\ \alpha = \frac{5}{6}$.

De seguida, será um momento de aplicação e consolidação dos conteúdos lecionados, onde os alunos realizarão exercícios e problemas do manual.

Exercício 31 da página 56:

a)

Utilizando a FFT, sai:

$$sen^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow sen\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$$

Como o alfa é um ângulo agudo, o valor do seno terá de ser positivo, logo:

$$sen\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

b)

Utilizando a outra relação entre as razões trigonométricas, sai:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \times \frac{3}{1} = \sqrt{8}$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender o que conhecimento deverá mobilizar para resolver a questão;
- Levantar a dois o cosseno de alfa, levantando somente o numerador;
- Perceber que se trata de uma equação que deverá resolver, sendo a incógnita o seno de alfa, tendo dificuldades na sua resolução, particularmente pelo facto de ter de operar com a subtração de frações e com a raiz quadrada.

O aluno poderá ainda:

- descartar a solução negativa sem a devida justificação.
- não apresentar a solução o mais simplificada possível.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "Que conhecimento é que me permite relacionar o valor do cosseno com o valor do seno de um mesmo ângulo?".
- "O que será elevado a dois?"; "Qual é o valor do cosseno (que será levantado a 2)?"; " $\frac{1^2}{3}$ é igual a $\left(\frac{1}{3}\right)^2$?".
- "O que quero determinar?"; "O seno de alfa é a minha incógnita, então o que devo fazer para a isolar?"; "Como posso subtrair frações?"; "Agora que conhecemos o quadrado de seno de alfa, como determinamos o seno de alfa?".
- "Qual solução deverei escolher: a positiva ou a negativa?"; "Porquê?".
- "A fração está o mais simplificada possível?". É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada. A professora poderá sugerir que os alunos contemplem as letras escritas a verde imediatamente antes do exercício 31, com o título *recorda*.

Exercício 34 da página 58:

Utilizando a FFT, sai:

$$sen^2\hat{L} + \cos^2\hat{L} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \cos^2\hat{L} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\hat{L} = 1 - \frac{441}{841}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\hat{L} = \frac{400}{841} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos\,\hat{L} = \pm\sqrt{\frac{400}{841}} \Leftrightarrow cos\,\hat{L} = \pm\frac{20}{29}$$

Como o alfa é um ângulo agudo, o valor do cosseno terá de ser positivo, logo:

$$cos\hat{L} = \frac{20}{29}$$

Utilizando a relação entre as três razões trigonométricas de um ângulo agudo, sai:

$$tg\hat{L} = \frac{sen\,\hat{L}}{cos\,\hat{L}} = \frac{\frac{21}{29}}{\frac{20}{29}} = \frac{21}{29} \times \frac{29}{20} = \frac{21}{20}$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender o que conhecimento deverá mobilizar para resolver a questão;
- Levantar a dois o cosseno de L, levantando somente o numerador;
- Perceber que se trata de uma equação que deverá resolver, sendo a incógnita o seno de alfa, tendo dificuldades na sua resolução, particularmente pelo facto de ter de operar com a subtração de frações e com a raiz quadrada.

O aluno poderá ainda:

- descartar a solução negativa sem a devida justificação.
- não apresentar a solução o mais simplificada possível.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- “Que conhecimento é que me permite relacionar o valor do cosseno com o valor do seno de um mesmo ângulo?”.
- “O que será elevado a dois?”; “Qual é o valor do cosseno (que será levantado a 2)?”; “ $\frac{20^2}{29}$ é igual a $\left(\frac{20}{29}\right)^2$?”.
- “O que quero determinar?”; “O seno de alfa é a minha incógnita, então o que devo fazer para a isolar?”; “Como posso subtrair frações?”; “Agora que conhecemos o quadrado de seno de alfa, como determinamos o seno de alfa?”.
- “Qual solução deverei escolher: a positiva ou a negativa?”; “Porquê?”.

- “A fração está o mais simplificada possível?”. É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada. A professora poderá sugerir que os alunos contemplem as letras escritas a verde imediatamente antes do exercício 31, com o título *recorda*.

ii.<u>Na demonstração de algumas relações</u>: **15 minutos**

Dado que será a primeira vez que os alunos irão contactar com demonstrações envolvendo as relações entre as razões trigonométricas, a professora irá resolver, em conjunto-turma, a primeira alínea do exercício 43. A segunda alínea será feita pelos alunos, autonomamente, caso a professora perceba que esta está a gerar muita confusão, irá proceder à sua resolução em grande grupo.

Exercício 43 da página 58:

a)

Esta alínea será resolvida em conjunto com os alunos

$$(sen\beta + cos\beta)^2 + (sen\beta - cos\beta)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen^2\beta + 2sen\beta cos\beta + \cos^2\beta + sen^2\beta - 2sen\beta cos\beta + \cos^2\beta = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{sen^2\beta + \cos^2\beta}_{\boxed{\text{FFT}}} + \underbrace{sen^2\beta + \cos^2\beta}_{\boxed{\text{FFT}}} = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$$

■

b)

$$1 + tg^2\beta = \frac{1}{cos^2\beta} \Leftrightarrow 1 + \frac{sen^2\beta}{cos^2\beta} = \frac{1}{cos^2\beta} \Leftrightarrow \frac{cos^2\beta}{cos^2\beta} + \frac{sen^2\beta}{cos^2\beta} = \frac{1}{cos^2\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos^2\beta + sen^2\beta = 1, \qquad porque\, cos^2\beta > 0$$

■

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender o que conhecimento deverá mobilizar para resolver a questão;
- Recordar-se das relações entre as três razões trigonométricas;
- Colocar ambos os membros com o mesmo denominador;

– Eliminar os denominadores com a justificação devida;

– Concluir o pretendido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

– "Qual a fórmula que relaciona a tangente com o cosseno de um ângulo agudo?";

– "Como posso somar 1 com $\frac{sen^2\beta}{cos^2\,\beta}$?"

– "Qual a fórmula que relaciona o seno com o cosseno de um ângulo agudo?"

iii. No cálculo de valores aproximados: **10 minutos**

Neste momento da aula, a professora indicará aos alunos que, conhecido o valor de uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo α é possível determinar, com a calculadora, valores aproximados das outras razões trigonométricas.

A professora ensinará aos alunos, sabendo que α é um ângulo agudo e $sen\,\alpha = \frac{2}{3}$, como calcular aproximadamente $cos\,\alpha$ e de $tg\,\alpha$, determinando previamente uma aproximação de α.

De seguida, será um momento de aplicação e consolidação dos conteúdos lecionados, onde os alunos realizarão exercícios e problemas do manual.

Exercício 32 da página 57:

32.1.

a) Utilizando a tecla sen^{-1} da calculadora:
$sen\alpha = 0{,}86 \Leftrightarrow \alpha = sen^{-1}(0{,}86), então\ \alpha \approx 59°$

b) $cos59° \approx 0{,}5$
c) $tg\alpha \approx 1{,}7$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Recordar o que deverá fazer para obter o valor do ângulo, sabendo o valor da razão trigonométrica;

– Calcular o cosseno sabendo o valor da amplitude do ângulo;

– Fazer os arredondamentos com as casas pedidas.

O aluno poderá esquecer-se de colocar os graus.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "O que sabemos: o valor da amplitude do ângulo ou o valor da razão trigonométrica?"; "Que tecla da calculadora deveremos usar?".
- "Já sabemos qual é o valor do ângulo alfa?".
- "Que arredondamento pretendemos?".

32.2.

a) Utilizando a tecla cos^{-1} da calculadora:

$$cos\alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right), então\ \alpha \approx 41{,}4°$$

Então, $sen\alpha \approx sen\, 41{,}4° \approx 0{,}7$

b) Utilizando a FFT, temos:

$$sen^2\alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} \Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{7}{16} \Leftrightarrow sen\alpha$$

$$= \pm\sqrt{\frac{7}{16}} \Leftrightarrow sen\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Como o alfa é um ângulo agudo, o valor do seno terá de ser positivo, logo:

$$sen\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Recordar o que deverá fazer para obter o valor do ângulo, sabendo o valor da razão trigonométrica;
- Calcular o cosseno sabendo o valor da amplitude do ângulo;
- Fazer os arredondamentos com as casas pedidas;
- Compreender o que conhecimento deverá mobilizar para resolver a questão;
- Levantar a dois o cosseno de alfa, levantando somente o numerador;
- Perceber que se trata de uma equação que deverá resolver, sendo a incógnita o seno de alfa, tendo dificuldades na sua resolução, particularmente pelo facto de ter de operar com a subtração de frações e com a raiz quadrada.

O aluno poderá ainda:

- esquecer-se de colocar os graus.
- descartar a solução negativa sem a devida justificação.

– não apresentar a solução o mais simplificada possível.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

– "O que sabemos: o valor da amplitude do ângulo ou o valor da razão trigonométrica?"; "Que tecla da calculadora deveremos usar?".
– "Já sabemos qual é o valor do ângulo alfa?".
– "Que arredondamento pretendemos?".
– "Que conhecimento é que me permite relacionar o valor do cosseno com o valor do seno de um mesmo ângulo?".
– "O que será elevado a dois?"; "Qual é o valor do cosseno (que será levantado a 2)?"; " $\frac{3^2}{4}$ é igual a $\left(\frac{3}{4}\right)^2$?".
– "O que quero determinar?"; "O seno de alfa é a minha incógnita, então o que devo fazer para a isolar?"; "Como posso subtrair frações?"; "Agora que conhecemos o quadrado de seno de alfa, como determinamos o seno de alfa?".
– "Qual solução deverei escolher: a positiva ou a negativa?"; "Porquê?".
– "A fração está o mais simplificada possível?". É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada. A professora poderá sugerir que os alunos contemplem as letras escritas a verde imediatamente antes do exercício 31, com o título *recorda*.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 33 ao 39 e o 43 da página 58 do manual.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Será indicado como TPC, que os alunos realizem o exercício 33 da página 58 e o 85 a) da página 69, numa folha à parte, a entregar na aula seguinte.

ANEXOS:

31 Sendo $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ e α um ângulo agudo, calcula o valor exato de:

a) $\operatorname{sen}\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha$

34 $[KLM]$ é um triângulo retângulo em K.

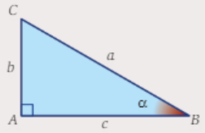
Sabe-se que $\operatorname{sen}\hat{L} = \frac{21}{29}$.

Calcula os valores exatos de $\cos\hat{L}$ e de $\operatorname{tg}\hat{L}$.

29 Atividade **Demonstrar**

O triângulo $[ABC]$ representa um triângulo retângulo em A.

- α designa um dos seus ângulos agudos.
- a, b e c representam as medidas dos lados.



a) Copia e completa a demonstração de que qualquer que seja o ângulo agudo α considerado se tem sempre: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$\operatorname{sen}\alpha = ?$; $\cos\alpha = ?$	Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.
$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = ? + ?$	Substituindo $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ pelas expressões já escritas.
$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{? + ?}{?}$	Adicionando as duas frações.
$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{?}{?}$	Aplicando o teorema de Pitágoras.
$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	Como queríamos provar.

b) Prova, aplicando a definição das razões trigonométricas, que qualquer que seja o ângulo agudo α considerado se tem sempre: $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

32

32.1 O ângulo α é agudo e $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}86$.

Calcula, utilizando a calculadora:

a) α arredondado às unidades.

b) $\cos\alpha$, arredondado às décimas.

c) $\operatorname{tg}\alpha$, arredondado às décimas.

32.2 Sendo $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, determina:

a) $\operatorname{sen}\alpha$, calculando primeiro α. Apresenta os resultados arredondados às décimas.

b) o valor exato de $\operatorname{sen}\alpha$.

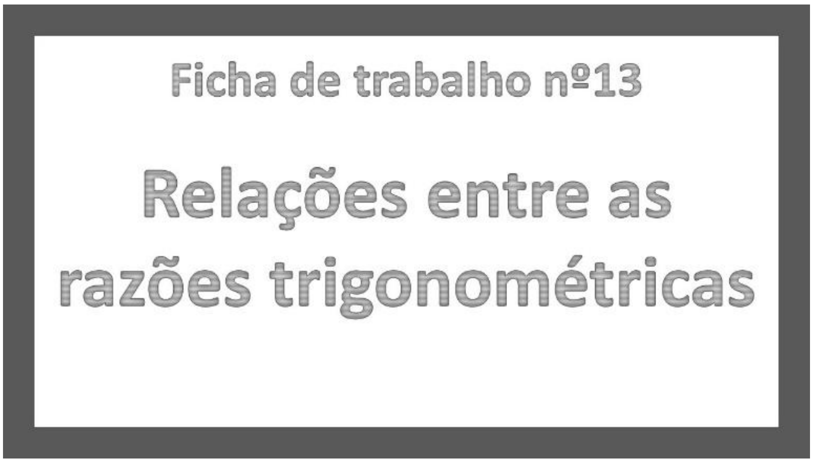
43 **Já consigo fazer demonstrações**

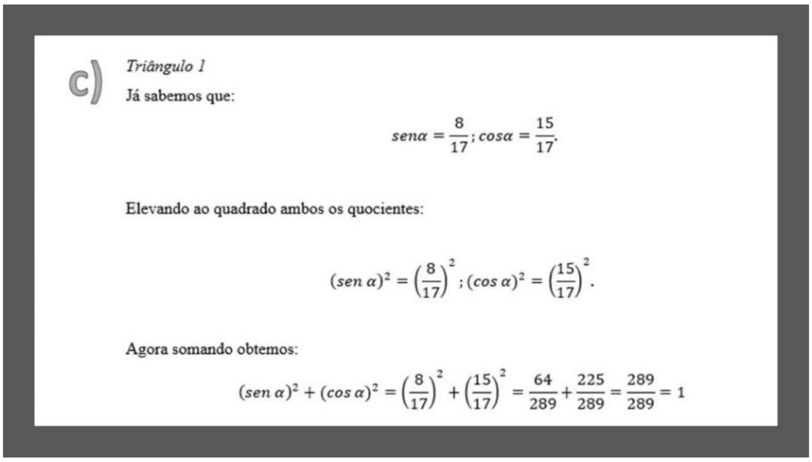
Prova que:

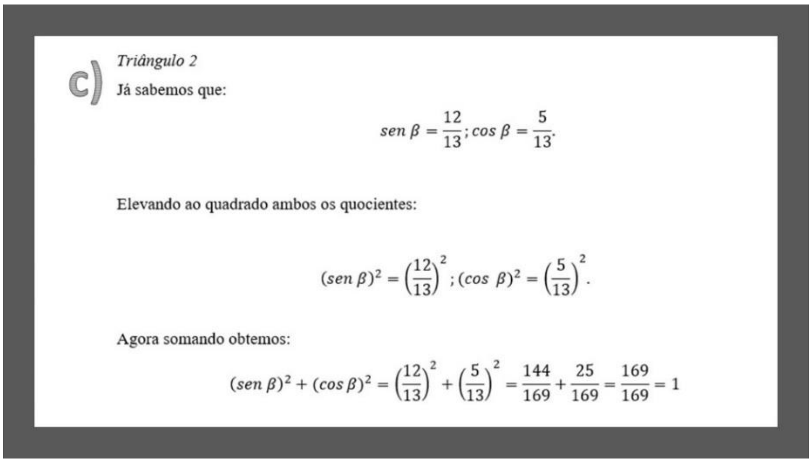
a) $(\operatorname{sen}\beta + \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\beta - \cos\beta)^2 = 2$

b) $1 + \operatorname{tg}^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

Anexo 17.1 – Diapositivos da aula 7







c) *Triângulo 3*

Já sabemos que:

$$sen\,\gamma = \frac{3}{5}; cos\,\gamma = \frac{4}{5}.$$

Elevando ao quadrado ambos os quocientes:

$$(sen\,\gamma)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2; (cos\,\gamma)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\,\gamma)^2 + (cos\,\gamma)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

- $(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$
- $(sen\,\beta)^2 + (cos\,\beta)^2 = 1$
- $(sen\,\gamma)^2 + (cos\,\gamma)^2 = 1$

Escrita simplificada

$sen^2\alpha$ é uma maneira simplificada de escrever $(sen\,\alpha)^2$.

De modo análogo:

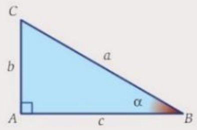
$$cos^2\alpha = (cos\,\alpha)^2$$
$$tg^2\alpha = (tg\,\alpha)^2$$

Atividade 29, página 55 do manual

29 Atividade **Demonstrar**

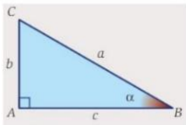
O triângulo $[ABC]$ representa um triângulo retângulo em A.

- α designa um dos seus ângulos agudos.
- a, b e c representam as medidas dos lados.



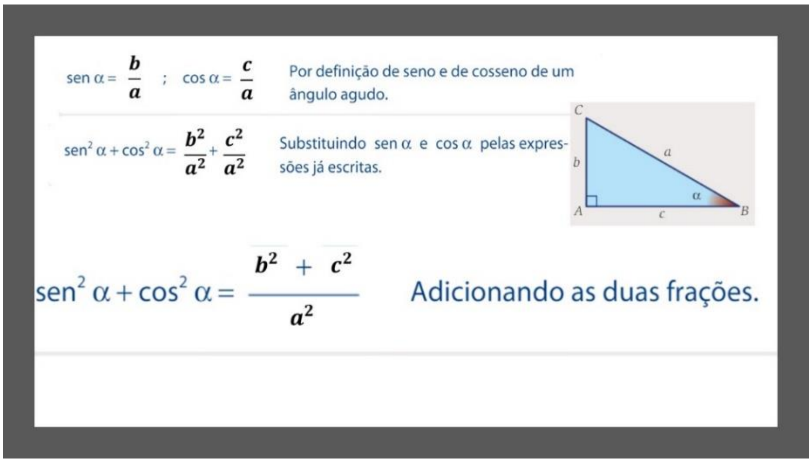
a) Copia e completa a demonstração de que qualquer que seja o ângulo agudo α considerado se tem sempre: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

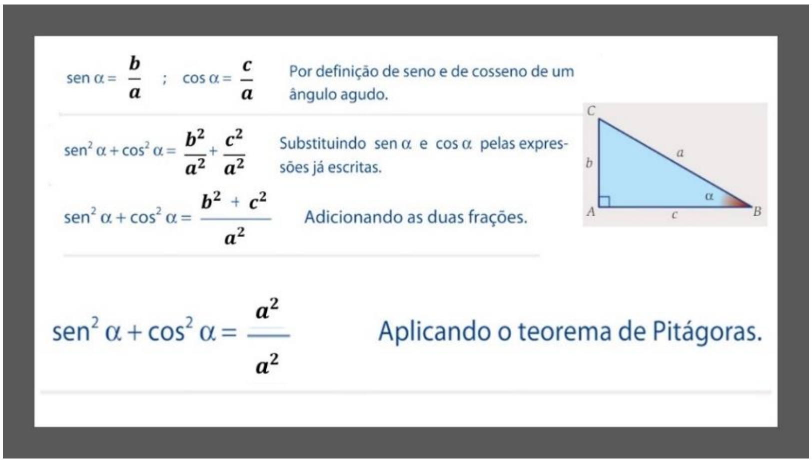
$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$ Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.

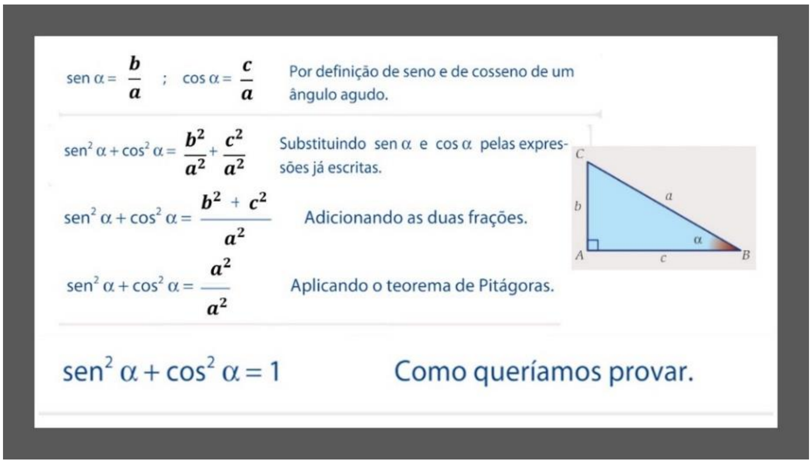


$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$ Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2}$ Substituindo $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ pelas expressões já escritas.

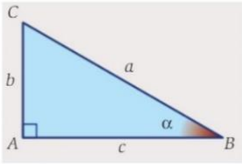

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$
Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2}$
Substituindo sen α e cos α pelas expressões já escritas.
C
a
b
α
A
c
B
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2 + c^2}{a^2}$
Adicionando as duas frações.


$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$
Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2}$
Substituindo sen α e cos α pelas expressões já escritas.
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2 + c^2}{a^2}$
Adicionando as duas frações.
C
a
b
α
A
c
B
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{a^2}{a^2}$
Aplicando o teorema de Pitágoras.


$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$
Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2}$
Substituindo sen α e cos α pelas expressões já escritas.
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2 + c^2}{a^2}$
Adicionando as duas frações.
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{a^2}{a^2}$
Aplicando o teorema de Pitágoras.
C
a
b
α
A
c
B
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
Como queríamos provar.

b) Prova, aplicando a definição das razões trigonométricas, que qualquer que seja o ângulo agudo α considerado se tem sempre: $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$.

$$\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{b}{a}} \qquad \boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{c}{a}} \qquad \boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{b}{c}}$$



$$\boldsymbol{\frac{sen\ \alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\ \alpha} \quad \blacksquare$$

Sistematização

Relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo α

Conhecida apenas uma das razões trigonométricas é possível determinar o valor das restantes.

- Relação entre o seno e o cosseno:

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT)

- Relação entre o seno, cosseno e tangente:

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}}$$

Como calcular os valores exatos de $cos\ \alpha$ e de $tg\ \alpha$ sabendo que α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{5}{6}$?

$cos\ \alpha$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{36} \Leftrightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{36} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos^2\alpha = \frac{11}{36} \Leftrightarrow cos\ \alpha = \sqrt{\frac{11}{36}} \vee \cos\alpha = -\sqrt{\frac{11}{36}}$$

$$\Leftrightarrow cos\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \vee \cos\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$$

Como α é um ângulo agudo, $cos\ \alpha$ é positivo, logo $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$tg\ \alpha$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{6} \times \frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$tg\ \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5 \times \sqrt{11}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

Racionalizar o denominador

Sabendo que α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{2}{3}$ como calcular aproximadamente $cos\ \alpha$ e de $tg\ \alpha$, determinando previamente uma aproximação de α?

α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{2}{3}$

$$\alpha \approx \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\alpha \approx 41{,}810° \approx 42°$$

$cos\, \alpha \approx \cos 42° \approx 0{,}743$ $\quad$ $tg\ \alpha \approx tg\ 42° \approx 0{,}900$

Anexo 18 – Plano da aula 7

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 14/03/2019 **Ano:** 9.º Turma: B/C **Duração:** 90 minutos

LIÇÃO N.º: 107 e 108

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.
- Valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência.
- Resolução de exercícios e problemas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações decorrentes.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Familiarização com a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares; valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência; aplicação e consolidação dos conhecimentos.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas; operar com frações; operar com radicais; propriedades de ângulos; Teorema de Pitágoras.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio matemático dado que os alunos irão inferir, com o suporte de uma ficha de trabalho previamente preparada para o efeito, a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares;

- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas em diversos contextos no âmbito da trigonometria.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); apresentação *PowerPoint*.
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e tabelas trigonométricas.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Relações entre as razões trigonométricas:
   i. No cálculo de valores aproximados (10 minutos)
3. Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares: (15 minutos)
   i. Resolução da atividade 44 da página 59 do manual;
   ii. Sistematização de ideias.
4. Valores exatos das razões trigonométricas: (20 minutos)
   i. Resolução da atividade 45 e 46 das páginas 59 e 60 do manual;
   ii. Apresentação da resolução;
   iii. Discussão e sistematização de ideias.
5. Consolidação dos conteúdos lecionados: (40 minutos)
   i. Resolução de problemas;
   ii. Apresentação da resolução;

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Relações entre as razões trigonométricas 10 minutos

i. <u>No cálculo de valores aproximados</u>:

Este ponto, encontra-se repetido na aula anterior, uma vez que o plano não foi cumprido, pelo que apenas serão apresentadas as resoluções dos exercícios.

Neste momento da aula, a professora indicará aos alunos que, conhecido o valor de uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo α é possível determinar, com a calculadora, valores aproximados das outras razões trigonométricas.

A professora ensinará aos alunos, sabendo que α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{2}{3}$, como calcular aproximadamente $cos\,\alpha$ e de $tg\ \alpha$, determinando previamente uma aproximação de α.

De seguida, será um momento de aplicação e consolidação dos conteúdos lecionados, onde os alunos realizarão exercícios e problemas do manual.

Exercício 32 da página 57:

32.1.

a) Utilizando a tecla sen^{-1} da calculadora:

$sen\alpha = 0{,}86 \Leftrightarrow \alpha = sen^{-1}(0{,}86), então\ \alpha \approx 59°$

b) $cos59° \approx 0{,}5$

c) $tg\alpha \approx 1{,}7$

32.2.

a) Utilizando a tecla cos^{-1} da calculadora:

$$cos\alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right), então\ \alpha \approx 41{,}4°$$

Então,

$$sen\alpha \approx sen\ 41{,}4° \approx 0{,}7$$

b) Utilizando a FFT, temos:

$$sen^2\alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} \Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{7}{16} \Leftrightarrow sen\alpha$$

$$= \pm\sqrt{\frac{7}{16}} \Leftrightarrow sen\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Como o alfa é um ângulo agudo, o valor do seno terá de ser positivo, logo:

$$sen\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

3. Relação entre ângulos complementares. **15 minutos**

i. Resolução da atividade 44 da página 59: **10 minutos**

Esta atividade será resolvida pela professora em grande grupo com os alunos com o apoio de uma apresentação *PowerPoint* (Anexo 18.1).

44.1. O triângulo é retângulo, logo um dos ângulos, neste caso Â, tem como amplitude 90°. Dado que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, $\hat{B} + \hat{C} = 90°$, portanto, os dois ângulos são complementares.

44.2. Uma vez que os dois ângulos são complementares, $\hat{B} + \hat{C} = 90°$.(1)
Se $\hat{C} = \alpha$, então, substituindo em (1) $\hat{B} + \alpha = 90°$, logo $\hat{B} = 90° - \alpha$.

44.3.

$$sen(90° - \alpha) = sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = cos\hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$cos(90° - \alpha) = \cos\hat{B} = \frac{c}{a}$$

44.4. Pode observar-se que o seno do ângulo em *B* é igual ao cosseno do ângulo em *C* e que o seno do ângulo em *C* é igual ao seno do ângulo em *B*.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir justificar por que razão os ângulos em *B* e em *C* são complementares; ou até mesmo em recordar-se da definição de ângulos complementares;
- Escrever qual a amplitude do ângulo pedida;
- Conseguir escrever as razões trigonométricas pedidas.

O aluno poderá não conseguir estabelecer a relação pretendida, e concluir, assim, o que se pretende.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá sugerir que os alunos:

– atentem no texto escrito a verde logo do lado direito da atividade, que recorda a definição de ângulos complementares. A professora poderá perguntar: "Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo?"; "Já conheço a amplitude de algum dos ângulos?"; "Se sim, qual? E quanto é essa amplitude?".
– escrevam, simbolicamente, a informação dada no enunciado, isto é, como nos diz que *ACB* tem de amplitude α, o aluno poderá escrever: $A\hat{C}B = \alpha$; depois a professora poderá sugerir que o aluno aplique a definição de complementaridade, ou seja, $A\hat{B}C + A\hat{C}B = 90° \Leftrightarrow A\hat{B}C + \alpha = 90°$; e, finalmente, a professora sugerirá que o aluno escreva em função do ângulo *ABC*, obtendo o pretendido.
– consultem os registos feitos no caderno diário acerca das razões trigonométricas a fim de que consigam mobilizar esses conhecimentos. A professora pode ainda perguntar: "Qual é a amplitude de $90° - \alpha$?".

A professora pode perguntar: "Então das razões trigonométricas escritas consegues relacioná-las de alguma forma?"; "Como?".

ii. <u>Sistematização de ideias:</u> **5 minutos**

A professora dirá aos alunos que abram o seu caderno diário para registarem o seguinte:

<u>Título:</u> Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

– O seno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao cosseno do seu ângulo complementar, isto é, $sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$.
– O cosseno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao seno do seu ângulo complementar, isto é, $cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)$.

Curiosidade: Etimologicamente, cosseno significa seno do complementar (co-seno).

3. Valores exatos das razões trigonométricas **20 minutos**

i. <u>Resolução da atividade 45 e 46 das páginas 59 e 60 do manual</u>: **10 minutos**

Neste momento, os alunos realizarão a atividade 45 em trabalho autónomo. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter e aproveitará o momento para recolher o trabalho de casa enviado na aula anterior.

Relativamente à atividade 46 será resolvida pela professora em grande grupo com o apoio de uma apresentação *PowerPoint* (Anexo 18.1), pelo que não são apresentadas as dificuldades dos alunos.

ii. Apresentação da Resolução: **10 minutos**

A seleção dos grupos a apresentarem a resolução da atividade 45 no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Atividade 45 da página 59 do manual

a) Uma vez que o triângulo é retângulo, tem um ângulo de amplitude 90°, e sabe-se que o ângulo em A tem de amplitude 45°, o outro ângulo, o que sobra, forçosamente terá de amplitude 45° também, dado que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Como o ângulo em A tem a mesma amplitude que o ângulo em *C*, conclui-se que $\overline{BC} = \overline{AB} = 1$ (a ângulos iguais opõem-se lados iguais).

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 1^2 + 1^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2},$$

$\overline{AC} > 0$, porque $\overline{AC}$ é um comprimento.

b) Uma vez que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° e como o triângulo é causa é retângulo, significa que tirando o ângulo reto ficam a sobrar 90°. Acrescentando o facto de o triângulo ser isósceles (a lados iguais opõem-se ângulos iguais), as amplitudes dos restantes ângulos serão também iguais, logo 45°.

c)

$$sen45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{1}{1} = 1$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- conseguir determinar o valor dos comprimentos dos lados do triângulo, seja por não conseguir mobilizar o Teorema de Pitágoras, seja por não conseguir argumentar o suficiente para garantir que o triângulo é isósceles;
- recordar que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$;
- conseguir escrever as razões trigonométricas pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "Como podemos determinar a medida de comprimento desconhecido de um dos lados de um triângulo retângulo?"; "Como posso garantir que a medida do comprimento do lado *BC* é efetivamente 1?"; "Que informações temos sobre o triângulo?".
- "Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?"; "Como é que essa informação nos ajuda a resolver esta questão?".

A professora poderá sugerir que os alunos consultem os registos feitos no caderno diário acerca das razões trigonométricas a fim de que consigam mobilizar esses conhecimentos.

Atividade 46 da página 60 do manual

46.1. Por definição, a altura [CM] é perpendicular a [AB]. Assim o triângulo [AMC] é retângulo em *M*.

Por outro lado, como o triângulo [ABC] é equilátero, todos os seus ângulos têm a mesma amplitude ($60°$) e, portanto, o ângulo em *A* tem amplitude $60°$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, tendo em conta os dois pontos anteriores, tem-se que o ângulo $A\hat{C}M$ tem amplitude $30°$.

46.2. Como [AC] e [BC] têm o mesmo comprimento, sabemos que a altura [CM] divide o lado [AB] em dois segmentos com o mesmo comprimento. Como $\overline{AB} = 2$, temos que [AM] e [BM] têm comprimento 1.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 1^2 + MC^2 = 2^2 \Leftrightarrow 3 = \overline{MC}^2 \Leftrightarrow \overline{MC} = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC} = \sqrt{3},$$

$\overline{MC} > 0$, porque $\overline{MC}$ é um comprimento.

46.3. b) $sen 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $cos 60° = \frac{1}{2}$

d) $tg 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

iii. <u>Sistematização de ideias:</u> **5 minutos**

A professora dirá aos alunos que abram o seu caderno diário para registarem o seguinte:

<u>Título:</u> Valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência

	$30°$	$45°$	$60°$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

4. Consolidação da matéria lecionada **50 minutos**

i. <u>Resolução de exercícios e problemas</u>:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. <u>Apresentação da resolução e discussão</u>:

Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Será realizada à medida que os alunos forem realizando as atividades. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Exercício 74 da página 66:

a) 1º Processo:

$$cos\ 45° = \frac{3\sqrt{2}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\cos 45°} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x$$

$$= 3 \times 2 \Leftrightarrow x = 6cm$$

2º Processo:

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2\left(3\sqrt{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2 \times 9 \times 2 = x^2 \Leftrightarrow 36 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6\ cm, \qquad porque\ x > 0\ por\ ser\ uma\ medida\ de\ comprimento$$

Resolução alternativa:

Atendendo ao facto de o triângulo ser isósceles, tem-se que os ângulos são complementares, logo,

$$\cos(\hat{A}) = sen(90 - \hat{A})$$

$$sen\ 45° = \frac{3\sqrt{2}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\mathrm{sen}\ 45°} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x$$

$$= 3 \times 2 \Leftrightarrow x = 6cm$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar as incógnitas;
- Determinar o valor exato pedido em ambos os casos.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar:

– “Então como é que podemos isolar x?”;
– “Qual é o valor exato da razão trigonométrica com o ângulo indicado?”.

b) $tg\ 60° = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5 \times tg\ 60° \Leftrightarrow x = 5 \times \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{3}cm$

$$cos\ 60° = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y = \frac{5}{cos60°} \Leftrightarrow y = \frac{5}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = 5 \times \frac{2}{1} \Leftrightarrow y = 10cm$$

Resolução alternativa:

Atendendo ao facto de o triângulo ser isósceles, tem-se que os ângulos são complementares, logo,

$$\cos(\hat{A}) = sen(90 - \hat{A})$$

$$sen\ 30° = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y = \frac{5}{sen30°} \Leftrightarrow y = \frac{5}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = 5 \times \frac{2}{1} \Leftrightarrow y = 10cm$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
– Conseguir isolar as incógnitas;
– Determinar o valor aproximado pedido em ambos os casos.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar:

– “Então como é que podemos isolar x?”;
– “Qual é o valor exato da razão trigonométrica com o ângulo indicado?”.

Exercício 61 da página 65:

Para realizar este problema, assumiremos que o peso do guindaste realiza uma perpendicular com a sua base, formando assim um ângulo de amplitude 90° entre o comprimento y e o comprimento x.

$$cos\ 38° = \frac{x}{8,5} \Leftrightarrow cos 38° \times 8,5 = x, \qquad então\ x \approx 6,7m$$

$$sen\ 38° = \frac{y}{8,5} \Leftrightarrow sen\ 38° \times 8,5 = y, \qquad então\ y \approx 5,2m$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar as incógnitas;
- Determinar o valor aproximado pedido em ambos os casos.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar: “Então como é que podemos isolar $x (ou\ y)$?”;

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Exercício 62 da página 65:

A altura do poste será designada com a letra h, temos então:

$$tg\ 70° = \frac{h}{4} \Leftrightarrow 4 \times tg\ 70° = h, \qquad então\ h \approx 11\ m$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir compreender o que representa a altura do poste no triângulo retângulo;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar a incógnita h;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "O que representa a altura do poste no triângulo que nos é apresentado?"; "Que nome tem esse comprimento?".

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar h?";

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Exercício 63 da página 65:

63.1. $tg\ \alpha = \frac{3}{1,5} \Leftrightarrow tg\ \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = arctg(2),\ então\ \alpha \approx 63°$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Entender que a base do triângulo é o maior comprimento do retângulo representado;
- Entender que a altura do triângulo resulta da subtração da altura total da casa com a altura até ao telhado;
- Conseguir isolar α;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "Queremos determinar o ângulo α, que medidas conhecemos do triângulo retângulo representado?".

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar:

- "Qual é o comprimento da base do triângulo?"; "Qual é o comprimento da altura do triângulo?"; "Como posso obter esse comprimento?".
- "Então como é que podemos isolar α?"; "Qual é a tecla da calculadora que permite fazer essa operação?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

63.2. a) Pela trigonometria:

$$sen\ 63° = \frac{3}{x} \Rightarrow sen\ 63° \times x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{sen\ 63°}, \qquad então\ x \approx 3{,}4m$$

<u>Resolução alternativa</u>

$$cos\ 63° = \frac{1{,}5}{x} \Rightarrow cos\ 63° \times x = 1{,}5 \Rightarrow x = \frac{1{,}5}{cos\ 63°},$$

$$então\ x \approx 3{,}3m$$

A professora poderá alertar para o facto de se obterem dois valores diferentes utilizando diferentes razões trigonométricas. Isto acontece uma vez que o valor da amplitude ângulo que se está a utilizar já é uma aproximação muito "grosseira" (unidades) ao valor da amplitude do ângulo, então, já se perdeu algum rigor para este valor.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar x;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar x?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

63.2. b) Pelo Teorema de Pitágoras:

$$1{,}5^2 + 3^2 = x^2 \Leftrightarrow 2{,}25 + 9 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 11{,}25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11{,}25},$$

$$então\ x \approx 3{,}4m$$

$$porque\ x > 0\ dado\ que\ \ x\ é\ uma\ medida$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Mobilizar o Teorema de Pitágoras;
- Determinar o valor aproximado pedido;

O aluno poderá descartar a solução negativa sem a devida justificação.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "O que enuncia o Teorema de Pitágoras?"; "Qual é o nome do comprimento que queremos determinar?";

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

A professora poderá perguntar: “Ambas as soluções nos interessam para este problema?”; “Qual é que posso descartar?”; “Porquê?”.

Exercício 64 da página 65:

a) $sen\ \alpha = \frac{8}{10} \Leftrightarrow sen\ \alpha = 0{,}8 \Leftrightarrow \alpha = arcsen(0{,}8),\ então\ \alpha \approx 53°$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar α;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar: “Então como é que podemos isolar α?”; “Qual é a tecla da calculadora que permite fazer essa operação?”.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

b) $sen\ 58° = \frac{8}{d} \Leftrightarrow sen\ 58° \times d = 8 \Leftrightarrow d = \frac{8}{sen\ 58°},\ então\ d \approx 9{,}4m$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar d;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar d?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Exercício 65 da página 65.

a) $tg\ 55° = \frac{16}{x} \Leftrightarrow tg\ 55° \times x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{tg\ 55°},\ então\ x \approx 11{,}2m$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar x;
- Determinar o valor aproximado pedido.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar x?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

b) $sen\ \alpha = \frac{16}{18} \Rightarrow sen\ \alpha \approx 0{,}889 \Rightarrow \alpha \approx arcsen(0{,}889),\ então\ \alpha \approx 63°$

A professora chamará à atenção dos alunos que o trapézio é escaleno, logo o valor da amplitude do ângulo alfa será diferente de $55°$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Obter um triângulo retângulo conveniente que permita determinar a amplitude do ângulo alfa;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar α;
- Saber quantas casas decimais deve preservar nos cálculos intermédios;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "Como consigo obter um triângulo retângulo de forma a que o ângulo alfa esteja incluído?". A professora poderá sugerir que os alunos representem à parte esse mesmo triângulo para que seja mais fácil a visualização por parte dos alunos.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar α?"; "Qual é a tecla da calculadora que permite fazer essa operação?".

A professora recordará aquilo que já foi referido: quando nada é mencionado no enunciado em relação ao número de casas decimais a serem preservadas nos cálculos intermédios, os alunos deverão deixar pelo menos 3 casas decimais, de forma a que o resultado seja a melhor aproximação possível.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Exercício 66 da página 65.

a) $cos\ 66° = \frac{4,5}{l} \Leftrightarrow cos\ 66° \times l = 4,5 \Leftrightarrow l = \frac{4,5}{cos\ 66°},\ então\ l \approx 11m$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual é o triângulo retângulo que permite utilizar as razões trigonométricas;
- Entender as implicações advindas do facto do triângulo ser isósceles (base do triângulo retângulo e dois ângulos iguais);
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar l;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: “Posso aplicar as razões trigonométricas no triângulo representado?”; “Porquê?”; “Qual é o triângulo em que posso utilizar as razões trigonométricas?”.

A professora poderá perguntar: “Este triângulo é isósceles, então o que sabemos acerca de dois dos seus ângulos e dos lados correspondentes?”.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar: “Então como é que podemos isolar l?”.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

b) $A_{triângulo} = \frac{9 \times x}{2}$

x é a altura do triângulo que pode ser determinada através da trigonometria:

$$tg\ 66° = \frac{x}{4,5} \Leftrightarrow 4,5 \times tg\ 66° = x, \qquad então\ x \approx 10,107cm$$

Então a área do triângulo é dada por:

$$A_{triângulo} = \frac{9 \times 10{,}107}{2} \approx 45\ cm^2$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Mobilizar a forma de calcular a área do triângulo;
- Compreender qual é o comprimento que corresponde à base e qual corresponde à altura do triângulo;
- Compreender qual é o triângulo retângulo que permite utilizar as razões trigonométricas;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar x;
- Saber quantas casas decimais deve preservar nos cálculos intermédios;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá sugerir que os alunos consultem a lapela do manual dos alunos onde aparecem todas as fórmulas para o cálculo das áreas de polígonos.

A professora poderá perguntar:

- "Qual é o comprimento que corresponde à base do triângulo e qual à altura?"; "Porquê?". É uma boa altura para a professora relembrar aos alunos que a altura tem de ser sempre perpendicular à base.
- "Posso aplicar as razões trigonométricas no triângulo representado?"; "Porquê?"; "Qual é o triângulo em que posso utilizar as razões trigonométricas?".

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar x?". (A professora deverá referir que os alunos podem escolher uma qualquer letra para designar a incógnita, no entanto, esta deve estar univocamente identificada.)

A professora recordará aquilo que já foi referido: quando nada é mencionado no enunciado em relação ao número de casas decimais a serem preservadas nos cálculos intermédios, os alunos deverão deixar pelo menos 3 casas decimais, de forma a que o resultado seja a melhor aproximação possível.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 67 ao 88 das páginas 66 à 69.

AVALIAÇÃO:

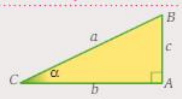
A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

ANEXOS:

44 Atividade **À descoberta da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares**

Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A. Designa:

- a amplitude do ângulo ACB por α.
- as medidas dos lados do triângulo por a, b e c, como sugere a figura.



44.1 Justifica que os ângulos B e C são complementares.

44.2 Se o ângulo ACB tem de amplitude α, qual é a amplitude do ângulo ABC?

44.3 Escreve as seguintes razões trigonométricas na forma de razões entre comprimentos dos lados do triângulo $[ABC]$.

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a}$ $\quad$ $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = ?$

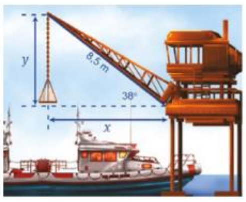
$\cos \alpha = ?$ $\quad$ $\cos(90° - \alpha) = ?$

44.4 Observa os resultados obtidos na alínea anterior.

Que relação podes estabelecer entre os resultados obtidos para o seno e o cosseno de ângulos complementares?

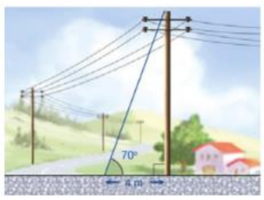
Resolver problemas em diversos contextos

61 **O guindaste**



Calcula valores aproximados de x e de y, arredondados às décimas.

62 **A altura do poste**

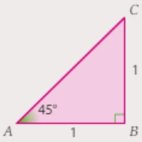


Calcula o valor aproximado da altura do poste, arredondado às unidades.

45 Atividade **Valores exatos das razões trigonométricas de um ângulo de 45°**

Pretendemos determinar, sem auxílio da calculadora, os valores exatos de sen 45°, cos 45° e tan 45°.

A figura representa o triângulo $[ABC]$, retângulo em B, tal que o ângulo BAC tem de amplitude 45° e $\overline{AB}=1$.



a) Mostra que $\overline{BC}=1$ e que $\overline{AC}=\sqrt{2}$.

b) Justifica a afirmação:

Os ângulos agudos de um triângulo retângulo isósceles medem ambos 45°.

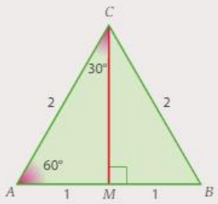
c) Determina os valores exatos de sen 45°, cos 45° e tg 45°.

46 Atividade **Calcular os valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de 30° e 60°**

Para calcular os valores exatos das razões trigonométricas de 30° e 60°, basta obter um triângulo retângulo com ângulos agudos de 30° e 60° e conhecer as medidas dos seus lados.

Considera o triângulo equilátero $[ABC]$ e a altura $[CM]$ relativa a um dos lados, como sugere a figura.

Para facilitar os cálculos, considera que a medida do comprimento de cada lado é 2.

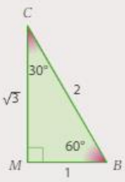


46.1 Justifica a afirmação:

A altura $[CM]$ divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos com dois ângulos agudos de 30° e 60°: $\triangle[AMC]$ e $\triangle[BMC]$.

46.2 Verifica que $\overline{CM}=\sqrt{3}$.

46.3 Considerando as medidas do $\triangle[BMC]$, determina os valores exatos de:



a) $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Multiplicaram-se ambos os termos da fração por $\sqrt{3}$, de modo a obter-se no denominador um número racional.

b) sen 60°

c) cos 60°

d) tg 60°

63 **O telhado da garagem**

Observa a figura.

63.1 Determina o valor arredondado às unidades da amplitude de α.

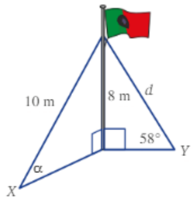
63.2 Calcula o valor arredondado às décimas de x, por dois processos diferentes:

a) Usando a trigonometria.

b) Usando o teorema de Pitágoras.

64 **O poste da bandeira**

Observa a figura.

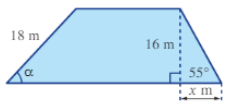


Determina:

a) o valor, arredondado às unidades, da amplitude do ângulo α.

b) o valor, arredondado às décimas, do comprimento d.

65 O trapézio representado na figura é escaleno.

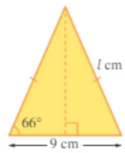


Calcula:

a) o valor, arredondado às décimas, de x.

b) o valor, arredondado às unidades, de α.

66 O triângulo representado na figura é isósceles.

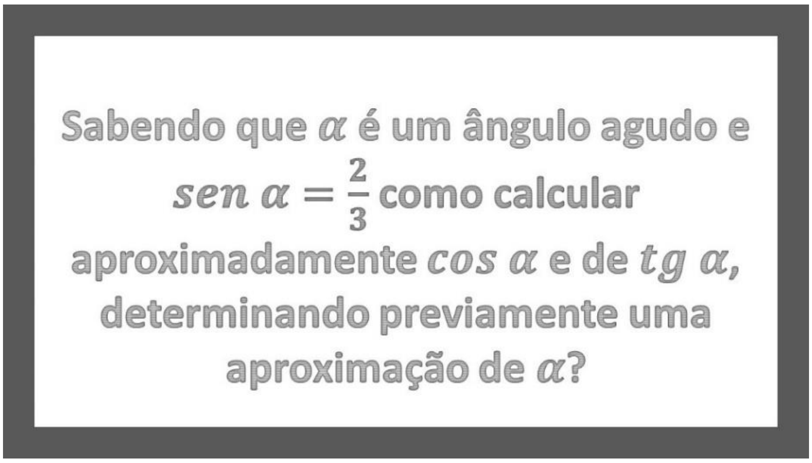


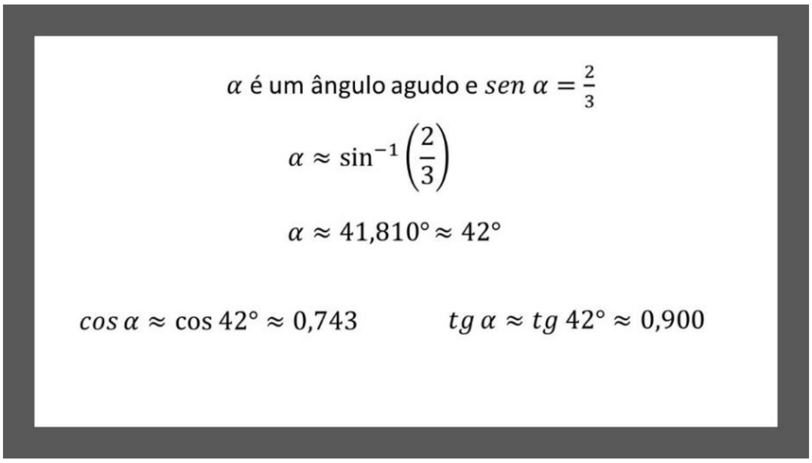
Calcula o valor, arredondado às unidades:

a) do lado l do triângulo.

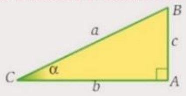
b) da área do triângulo.

Anexo 18.1 – Diapositivos da aula 8





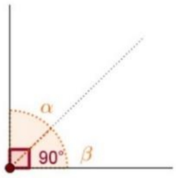
44 Atividade **À descoberta da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares**

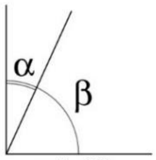


Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A. Designa:

- a amplitude do ângulo ACB por α.
- as medidas dos lados do triângulo por a, b e c, como sugere a figura.

44.1 Justifica que os ângulos B e C são complementares.





$\alpha+\beta= 90°$

Recorda

O $\measuredangle AOB$ é **complementar do** $\measuredangle BOC$ se a soma dos dois ângulos for um ângulo reto.

$A\hat{O}B + B\hat{O}C = 90°$

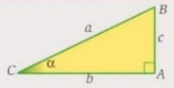
A soma das amplitudes de dois ângulos complementares é $90°$.

44.1)

O triângulo é retângulo, logo um dos ângulos, neste caso $\hat{A}$, tem como amplitude $90°$. Dado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, $\hat{B} + \hat{C} = 90°$, portanto, os dois ângulos são complementares.

44 Atividade **À descoberta da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares**

Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A. Designa:

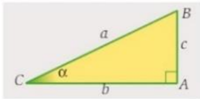


- a amplitude do ângulo ACB por α.
- as medidas dos lados do triângulo por a, b e c, como sugere a figura.

44.1 Justifica que os ângulos B e C são complementares.

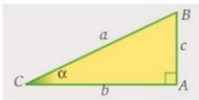
44.2 Se o ângulo ACB tem de amplitude α, qual é a amplitude do ângulo ABC?

44.2)



Uma vez que os dois ângulos são complementares, $\hat{B} + \hat{C} = 90°$.(1)

Se $\hat{C} = \alpha$, então, substituindo em (1) $\hat{B} + \alpha = 90°$, logo $\hat{B} = 90° - \alpha$.



44.3 Escreve as seguintes razões trigonométricas na forma de razões entre comprimentos dos lados do triângulo $[ABC]$.

sen $\alpha = \frac{c}{a}$ sen $(90° - \alpha) =$ $\boldsymbol{sen\ \hat{B} = \frac{b}{a}}$

cos $\alpha =$ $\boldsymbol{\frac{b}{a}}$ cos $(90° - \alpha) =$ $\boldsymbol{cos\ \hat{B} = \frac{c}{a}}$

44.4 Observa os resultados obtidos na alínea anterior.

Que relação podes estabelecer entre os resultados obtidos para o seno e o cosseno de ângulos complementares?

$$\boldsymbol{cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha) = \frac{b}{a}}$$

Cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do ângulo complementar

$$\boldsymbol{sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha) = \frac{c}{a}}$$

Seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do ângulo complementar

Sistematização

Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

- O seno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao cosseno do seu ângulo complementar, isto é: $\boldsymbol{sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)}$

- O cosseno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao seno do seu ângulo complementar, isto é: $\boldsymbol{cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)}$

Atividade 46, página 60 do manual

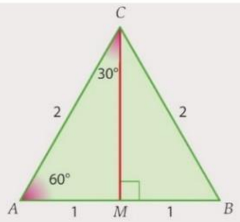
46 Atividade

Calcular os valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de 30° e 60°

Para calcular os valores exatos das razões trigonométricas de 30° e 60°, basta obter um triângulo retângulo com ângulos agudos de 30° e 60° e conhecer as medidas dos seus lados.

Considera o triângulo equilátero $[ABC]$ e a altura $[CM]$ relativa a um dos lados, como sugere a figura.

Para facilitar os cálculos, considera que a medida do comprimento de cada lado é 2.



46.1 Justifica a afirmação:

A altura $[CM]$ divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos com dois ângulos agudos de 30° e 60°: $\triangle[AMC]$ e $\triangle[BMC]$.

46.1

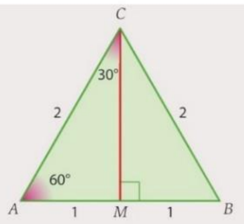
- Por definição, a altura [CM] é perpendicular a [AB]. Assim o triângulo [AMC] é retângulo em M.
- Por outro lado, como o triângulo [ABC] é equilátero, todos os seus ângulos têm a mesma amplitude ($60°$) e, portanto, o ângulo em A tem amplitude $60°$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, tendo em conta os dois pontos anteriores, tem-se que o ângulo $A\hat{C}M$ tem amplitude $30°$.

46.1

- Como o triângulo [ABC] é equilátero, todos os seus ângulos têm a mesma amplitude ($180° \div 3 = 60°$).

Tendo em conta os dois pontos anteriores, o ângulo em C será complementar do ângulo em A e do ângulo em B dos triângulos [AMC] e [MBC], respetivamente.



46.1 Justifica a afirmação:

A altura $[CM]$ divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos com dois ângulos agudos de $30°$ e $60°$: $\triangle[AMC]$ e $\triangle[BMC]$.

46.2 Verifica que $\overline{CM} = \sqrt{3}$.

46.2

Como [AC] e [BC] têm o mesmo comprimento, sabemos que a altura [CM] divide o lado [AB] em dois segmentos com o mesmo comprimento. Como $\overline{AB} = 2$, temos que [AM] e [BM] têm comprimento 1.

46.2

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 1^2 + MC^2 = 2^2 \Leftrightarrow 3 = \overline{MC}^2 \Leftrightarrow$$

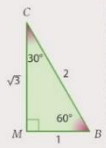
$$\Leftrightarrow \overline{MC} = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{MC} = \sqrt{3},$$

$\overline{MC} > 0$, porque $\overline{MC}$ é um comprimento.

■

46.2 Verifica que $\overline{CM} = \sqrt{3}$.

46.3 Considerando as medidas do $\triangle[BMC]$, determina os valores exatos de:



a) $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

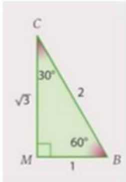
Multiplicaram-se ambos os termos da fração por $\sqrt{3}$, de modo a obter-se no denominador um número racional.

b) sen 60°

c) cos 60°

d) tg 60°

46.3



b)

$$sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)

$$cos60° = \frac{1}{2}$$

d)

$$tg60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Sistematização

Valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência

	$30°$	$45°$	$60°$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Anexo 19 – Plano da aula 8

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professora-estagiária: Joana Dias

Data: 18/03/2019 **Ano:** 9.º Turma: B **Duração:** 45 minutos

LIÇÃO N.º: 109

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Esclarecimento de dúvidas.
- Resolução de problemas: ficha de trabalho.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e resolução de problemas.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Resolução de problemas de contextos de realidade ou puramente matemáticos envolvendo as razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas no âmbito da trigonometria.

RECURSOS:

- Da professora: fichas de trabalho; tabelas de registo (participação e idas ao quadro);
- Do aluno: caderno diário; calculadora científica e tabela trigonométrica.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
2. Resolução de problemas de provas nacionais: (40 minutos)
   i. Resolução das tarefas;
   ii. Apresentação da resolução.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Formação dos grupos de trabalho.

Este é o momento de registar o sumário e as eventuais faltas dos alunos. De seguida, enquanto os alunos se organizam em grupos, a professora entregará a ficha de trabalho preparada para esta aula.

2. Resolver problemas de provas nacionais 40 minutos

Ao entregar as fichas de trabalho (Ficha de trabalho n.º14 – Anexo 7), a professora irá informar aos alunos que os problemas que constam na ficha são de provas nacionais mais especificamente do primeiro caderno, onde os alunos podem usar quer a calculadora, quer a tabela das razões trigonométricas.

De seguida, a professora irá recordar com os alunos os passos para a resolução de problemas:

- Compreender o problema;
- Identificar a incógnita e designá-la utilizando as letras da figura (caso a figura não apresente letras, será indicado aos alunos que atribuem letras de acordo com aquilo que for necessário);
- Traduzir o problema por uma equação e resolvê-la;
- Interpretar o resultado no contexto do problema;
- Dar a resposta.

i. Resolução:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão:

A apresentação da resolução no quadro será feita à medida que os alunos forem terminando cada uma das tarefas e tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Depois de cada resolução dos alunos, a professora pedirá que o aluno que for ao quadro explique o seu procedimento e aproveitará o momento para chamar à atenção de alguns pontos importantes de cada pergunta.

Problema 1:

A professora analisará com os alunos o enunciado deste primeiro problema, chamando-os à atenção para a forma como os dados surgem: no texto em linguagem natural e ainda através das figuras. Será ainda indicado aos alunos que sublinhem os dados que considerem mais importantes e que os confrontem, ou seja, verifiquem se aquilo que entenderam do texto em linguagem corrente, corresponde àquilo que está na figura. Ainda relativamente ao enunciado, a professora fará a indicação que os problemas referem sempre que aproximação deverá o aluno fazer na resposta final, bem como aquela que considerar quando realizar cálculos intermédios.

O triângulo $[CMT]$ é retângulo em C. Como, relativamente ao ângulo CMT, o lado $[MC]$ é o cateto adjacente e o lado $[TC]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

$$tg\ 60° = \frac{\overline{TC}}{\overline{MC}} \Leftrightarrow tg\ 60° = \frac{\overline{TC}}{25{,}6} \Leftrightarrow \overline{TC} = 25{,}6 \times tg\ 60°$$

$$\overline{TC} \approx 44{,}29\ metros$$

O triângulo $[CRT]$ é retângulo em C. Como, relativamente ao ângulo CRT, o lado $[CR]$ é o cateto adjacente e o lado $[TC]$ é o cateto oposto, voltando a usar a definição de tangente, temos:

$$tg\ 45° = \frac{\overline{TC}}{\overline{CR}} \Leftrightarrow \overline{CR} = \frac{\overline{TC}}{tg\ 45°}$$

$$\overline{CR} \approx 44{,}29\, metros$$

($\overline{CR}$ também poderia ser determinado, reparando que o triângulo $[CRT]$ é isósceles)

Assim, determinando o valor de $\overline{MR}$, em metros, e arredondando às unidades, vem que:

$$\overline{MR} = \overline{MC} + \overline{CR} \approx 25{,}6 + 44{,}29 \approx 70\, metros$$

R: A Marta e o Rui estão a, aproximadamente, 70 metros um do outro.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- retirar do longo texto, habitual nos problemas das provas, todos os dados necessários para resolver o problema.
- perceber que os triângulos $[CMT]$ e $[CRT]$ são retângulos em C.
- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida.
- perceber que $\overline{MR}$ é a soma entre $\overline{MC}$ e $\overline{CR}$
- determinar $tg\ 60°$.
- arredondar às casas decimais pedidas.
- dar resposta ao problema tendo em conta o seu contexto.
- utilizar corretamente o sinal de "aproximadamente igual".

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar: "Será possível determinar $\overline{MR}$ utilizando o triângulo $[MRT]$?"; "Porquê?". Caso os alunos tenham dificuldade em responder a estas perguntas, a professora deverá relembrar aos alunos que condição terá de ter o retângulo para que possam ser utilizadas as razões trigonométricas e assim ajudar os alunos a verificar que o triângulo $[MRT]$ poderá ser dividido em dois: $[CMT]$ e $[CRT]$ ambos retângulos em C.

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Que dados o problema nos fornece?"; "Que dados é que o problema pede?"; "Que razão relaciona o dado que temos com a informação que queremos obter?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar $\overline{TC}$?"; "Se 25,6 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que seja consultada a tabela trigonométrica ou seja utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor da tangente de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Por fim, a professora indicará que releiam a pergunta do problema e reparem se efetivamente responderam de acordo com aquilo que era pedido. Deverá ainda indicar que, tal como diz no enunciado, em cálculos intermédios deverão conservar no mínimo duas casas decimais. Caso a professora verifique que o aluno está a utilizar o sinal de "=" após proceder a um arredondamento deve rá perguntar: "O valor obtido é exato?"; "Podemos utilizar esse sinal?".

Problema 2:

Como M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, temos que $\overline{AM} = \overline{MB}$, e assim

$$\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{PA} + 2 \times \overline{MB}$$

Logo, substituindo os valores conhecidos, vem:

$$\overline{PB} = \overline{PA} + 2 \times \overline{MB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8 = 2 + 2 \times \overline{MB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8 - 2 = 2 \times \overline{MB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{2} = \overline{MB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 = \overline{MB}$$

Como $[CB]$ e $[CT]$ são raios da circunferência, vem que:

$$\overline{CB} = \overline{CT} = 9{,}2$$

Como o triângulo $[BCA]$ é isósceles, e o ponto M é o ponto médio do lado menor do triângulo, o lado $[AB]$, então $[CM]$ é a altura relativamente ao lado $[AB]$, e por isso o segmento $[CM]$ é perpendicular ao segmento $[AB]$, ou seja o triângulo $[BCM]$ é retângulo em M.

Como, relativamente ao ângulo BCM, o lado $[MB]$ é o cateto oposto e o lado $[CB]$ é a hipotenusa, usando a definição de seno, temos:

$$sen\left(B\hat{C}M\right) = \frac{\overline{MB}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow sen\left(B\hat{C}M\right) = \frac{3}{9{,}2}$$

$$B\hat{C}M = sen^{-1}\left(\frac{3}{9{,}2}\right) \approx 19°$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- iniciar a resolução do problema, tendo em conta a quantidade de informação disponibilizada.
- perceber que, sendo M o ponto médio $[A]$, então $\overline{AM} = \overline{MB}$ e então concluir que $\overline{PB} = \overline{PA} + 2 \times \overline{MB}$.
- resolver corretamente a equação.
- perceber que $[CB]$ e $[CT]$ são raios da circunferência.
- justificar que o triângulo $[BCM]$ é retângulo em M.
- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida.
- determinar a amplitude do ângulo a partir do conhecimento do valor da razão trigonométrica.
- arredondar às casas decimais pedidas.
- utilizar corretamente o sinal de "aproximadamente igual".

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá indicar aos alunos que, tendo em conta que a maioria da informação está indicada por pontos, comecem por tentar entender cada um dos pontos. Poderá ainda perguntar: "Se M é o ponto médio de um segmento de reta, o que podemos concluir sobre a distância do ponto M e cada um dos extremos do segmento?". De seguida, a professora deverá sugerir que os alunos tentem escrever uma equação que relacione as medidas dos comprimentos dadas com aquela que é pedida. Relativamente à resolução da equação, a professora poderá chamar à atenção dos alunos, utilizando as seguintes perguntas: "Qual a nossa incógnita nesta equação?"; "Qual a primeira operação a realizar?"; "O 2 está a somar, logo passará para o outro membro, como?"; "E agora que operação iremos realizar?"; "O 2 está a multiplicar, logo passará para o outro membro, como?".

Apontando para a circunferência, a professora poderá perguntar aos alunos: "Que figura geométrica é esta?"; "Então se os pontos T, A e B pertencem à circunferência, o que posso dizer sobre $[CB]$? E sobre $[CT]$? E $[CA]$?"; "Se são os raios da circunferência, o que sabemos sobre a sua medida?"; "Então posso desenhar aqui um triângulo ($[BCA]$), que podemos dizer sobre este triângulo?"; "Já podemos aplicar as razões trigonométricas?"; "$[CM]$ é a altura relativamente ao lado $[AB]$, então o triângulo $[BCM]$ é retângulo em que vértice?".

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Que dados o problema nos fornece?"; "Que dados é que o problema pede?"; "Que razão relaciona o dado que temos com a informação que queremos obter?".

A professora deverá sugerir que seja consultada a tabela trigonométrica ou seja utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor da amplitude do ângulo conhecendo o valor da razão trigonométrica, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos. Deverá ainda indicar que, tal como diz no enunciado, em cálculos intermédios deverão conservar no mínimo duas casas decimais. Caso a professora verifique que o aluno está a utilizar o sinal de "=" após proceder a um arredondamento deve rá perguntar: "O valor obtido é exato?"; "Podemos utilizar esse sinal?".

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 3 e 4 da ficha de trabalho.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá no trabalho individual produzido, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Anexo 20 – Plano da aula 10

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professora-estagiária: Joana Dias

Data: 19/03/2019 **Ano:** 9.º Turma: B **Duração:** 90 minutos

LIÇÃO N.º: 110 e 111

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Esclarecimento de dúvidas.
- Resolução de exercícios e problemas.
- 4.ª Questão-Aula.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações daí decorrentes.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidação dos conteúdos lecionados.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas; Teorema de Pitágoras e seu recíproco; valores aproximados.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas dado que irão contactar com problemas em contextos matemáticos e/ou aplicados à realidade, tendo

de delinear uma estratégia eficiente para a sua resolução e saber dar a resposta de acordo com o contexto em questão;

- Desenvolver o raciocínio matemático uma vez que terão de ser capazes de justificar estratégias escolhidas e soluções apresentadas.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); fichas de trabalho.
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e tabelas trigonométricas.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Resolução de exercícios e problemas. (55 minutos)
3. 4.ª Questão-Aula. (30 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Resolução de exercícios e problemas 55 minutos

Esta aula terá por objetivo que os alunos consolidem os seus conhecimentos acerca das razões trigonométricas. Serão esclarecidas dúvidas aos alunos. Caso os alunos não apresentem dúvidas, será distribuída uma ficha de trabalho. Serão ainda indicados os exercícios do manual e do caderno de atividades.

i. Resolução da ficha de trabalho n.º 15 (Anexo 8): **30 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da Resolução e Discussão: **25 minutos**

A apresentação da resolução no quadro será feita à medida que os alunos forem terminando cada uma das tarefas e tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Depois de cada resolução dos alunos, a professora pedirá que o aluno que for ao quadro explique o seu procedimento e aproveitará o momento para chamar à atenção de alguns pontos importantes de cada problema.

Tarefa 1

a) Pela FFT temos:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$sen^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{2}{4} \Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sen\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow sen\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow sen\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow sen\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, porque α é um ângulo agudo

Pela outra relação entre as razões trigonométricas, temos:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Logo,

$$tg\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Então, sai:

$$1 + tg^2\alpha = 1 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender que deverá utilizar ambas as relações entre as razões trigonométricas que conhece;

- Elevar ao quadrado o cosseno de alfa, elevando somente o numerador;
- Perceber que se trata de uma equação que deverá resolver, sendo a incógnita o seno de alfa, tendo dificuldades na sua resolução, particularmente pelo facto de ter de operar com a subtração de frações e com a raiz quadrada;

O aluno poderá ainda:

- descartar a solução negativa sem a devida justificação;
- não apresentar a solução o mais simplificada possível;
- achar que apenas uma das relações resolverá a questão e, consequentemente, poderá achar que tem dados em falta para resolver a questão.
- Utilizar valores arredondados, contrariamente ao que é pedido no enunciado.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora deverá perguntar: "Preciso de determinar o valor desta expressão, uma vez conhecido o cosseno, como poderei relacionar o cosseno com a tangente?"; "Para poder aplicar a relação que relaciona as três razões trigonométricas preciso de conhecer duas delas, já se verifica isso?"; "Que razão – entre o seno e a tangente – é que poderei utilizar para ficar apenas com uma incógnita?"; "Como posso relacionar o seno e o cosseno do mesmo ângulo?".

A professora poderá perguntar: "O que será elevado a dois?"; "Qual é o valor do cosseno (que será levantado a 2)?"; " $\frac{\sqrt{2}^2}{2}$ é igual a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$?"

A professora poderá perguntar: "O que quero determinar?"; "O seno de alfa é a minha incógnita, então o que devo fazer para a isolar?"; "Como posso subtrair frações?"; "Agora que conhecemos o quadrado de cosseno de alfa, como determinamos o seno de alfa?".

A professora poderá perguntar: "Qual solução deverei escolher: a positiva ou a negativa?"; "Porquê?".

A professora poderá perguntar: "A fração está o mais simplificada possível?". É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada.

A professora poderá perguntar: “Como é que podemos dividir frações?”. A professora poderá ainda recordar como se procede nessa operação.

b) $2sen\,\alpha - tg\alpha \ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender que todos os valores de que necessita já estão determinados, procedendo a cálculos desnecessários;

– Operar com raízes e com frações.

O aluno poderá ainda não apresentar o valor exato da solução, procedendo ao cálculo do seu valor aproximado.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora deverá perguntar: “Já conheço o valor do seno de alfa?”; “E da tangente?”; “Preciso de determinar mais alguma coisa?”.

É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada.

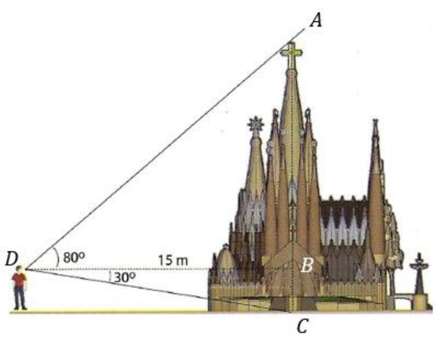
Tarefa 2

$\overline{AC}$ é a altura da catedral e aquilo que queremos determinar:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$tg80° = \frac{\overline{AB}}{15} \Leftrightarrow \overline{AB} = 15 \times tg80°, \qquad então\ \overline{AB} \approx 85{,}069\ m$$

$$tg30° = \frac{\overline{BC}}{15} \Leftrightarrow \overline{BC} = 15 \times tg30°, \qquad então\ \overline{BC} \approx 8{,}660\ m$$



Logo,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \approx 85{,}069 + 8{,}660 \approx 93{,}729 \approx 94\ m$$

R: A altura da catedral é aproximadamente 94 metros.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual razão trigonométrica relaciona a medida de comprimento que é dada, com a medida de comprimento que é pedida.;
- compreender que a altura do monumento é obtida através da soma da medida do comprimento $\overline{AB}$ com a medida do comprimento $\overline{BC}$;
- perceber quantas casas decimais deverá usar nos cálculos intermédios;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar o valor das tangentes;
- arredondar às casas decimais pedidas.

O aluno poderá ainda não responder ao problema, ou seja, escrever simplesmente o valor do comprimento, não contextualizando esse comprimento com o problema.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá começar por sugerir que os alunos nomeiem todos os vértices dos triângulos na figura, para mais facilmente serem designados os lados dos mesmos.

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "A altura do monumento é dada por que comprimento?"; "Como é que posso obter a medida desse comprimento?".

A professora deverá indicar aos alunos que nos cálculos intermédios deixem sempre pelo menos mais duas casas decimais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, assim, se para o resultado final pedem em décimas, os alunos deverão nos cálculos intermédios arredondar às milésimas. Isto se no enunciado não existir essa referência.

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 15 está a dividir no 2.º membro como pode passar para o 1.º membro da equação?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a efetuar nos arredondamentos.

A professora deverá relembrar aos alunos que deverão sempre apresentar a resposta do problema, contextualizando a mesma, que neste caso, é a altura do monumento.

Tarefa 3

a)

Tem-se $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ e $\overline{AE}^2 = 15^2 = 225$.

Assim, $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo $[ADE]$ é retângulo em D.

Dificuldades:

O aluno poderá considerar que o triângulo é retângulo pela observação do que parece ser um ângulo reto na figura.

O aluno poderá ter dificuldades em mobilizar o recíproco do Teorema de Pitágoras.

O aluno poderá confundir o Teorema de Pitágoras com o seu recíproco.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá perguntar: “Quando tenho um triângulo, que conhecimento é que me permite garantir que esse mesmo triângulo é retângulo?” e evidenciar que não existe informação nas figuras que permita assumir que o triângulo possuiu um ângulo reto; “Conhecem algum teorema que nos permita concluir que um triângulo é retângulo?”; “Qual o lado poderá ser a hipotenusa? Porquê?”.

A professora deverá recordar com os alunos quando é que se usa o Teorema de Pitágoras ou o seu recíproco: o Teorema só pode ser aplicado quando sabemos que o triângulo é retângulo, enquanto que o seu recíproco permite garantir isso mesmo.

b) Uma vez que o triângulo é retângulo em *D*, como acabamos de provar, então $\hat{A} + \hat{E} = 90°$, isto é, o ângulo em *A* e o ângulo em *E* são complementares. Como o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do ângulo complementar, segue que $cos\,\hat{A} = sen\,\hat{E}$.

Dificuldades:

O aluno poderá não conseguir mobilizar a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá perguntar: "Qual é o conhecimento que me permite igualar o seno de um ângulo ao cosseno de outro?". Caso os alunos não consigam responder a esta pergunta a professora poderá perguntar: "Qual é valor do seno do ângulo em A?"; "E qual é o valor do cosseno do ângulo em E?"; "O que são o ângulo em A e o ângulo em E?".

c)

Dado que o triângulo é retângulo, podemos aplicar as razões trigonométricas. Neste caso como temos todas as medidas de comprimento dos lados podemos aplicar qualquer uma das razões trigonométricas, logo:

$$sen\,\hat{A} = \frac{12}{15} \Leftrightarrow sen\,\hat{A} = 0{,}8 \Leftrightarrow \hat{A} = sen^{-1}(0{,}8), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Ou:

$$cos\,\hat{A} = \frac{9}{15} \Leftrightarrow cos\,\hat{A} = 0{,}6 \Leftrightarrow \hat{A} = cos^{-1}(0{,}6), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Ou:

$$tg\,\hat{A} = \frac{12}{9} \Leftrightarrow \hat{A} = tg^{-1}\left(\frac{12}{9}\right), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Recordar o que deverá fazer para obter o valor do ângulo, sabendo o valor da razão trigonométrica;
- Compreender que poderá usar qualquer uma das razões trigonométricas;
- Fazer os arredondamentos com as casas pedidas.

O aluno poderá esquecer-se de colocar os graus.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

– “O que sabemos: o valor da amplitude do ângulo ou o valor da razão trigonométrica?”; “Que tecla da calculadora deveremos usar?”;
– “Que razão trigonométrica podemos usar?”; “Porquê?”;
– “Que arredondamento pretendemos?”.

d) Comecemos por determinar o lado $\overline{AC}$. Podemos reparar que $\overline{AB} = \overline{BE} = 7{,}5\ cm$.

$$cos\ \hat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow 0{,}6 = \frac{7{,}5}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7{,}5}{0{,}6}, \qquad então\ \overline{AC} = 12{,}5\ cm$$

Calculemos agora $\overline{DC}$:

$$\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = 12{,}5 - 9 = 3{,}500\ cm$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
– Conseguir isolar a incógnita $\overline{AC}$;
– Perceber que $\overline{DC}$ resulta de uma diferença;
– Determinar o valor aproximado pedido.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar:

– “Então como é que podemos isolar $\overline{AC}$?”;
– “Como podemos calcular $\overline{DC}$?”; “Que comprimentos precisamos conhecer?”.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Tarefa 4

Pelos dados temos:

$$tg\ \hat{B} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow tg\ 60° = \frac{x}{y}$$

Obtemos duas incógnitas, logo precisamos de duas equações:

$$tg\ \hat{A} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow tg\ 30° = \frac{x}{20+y}$$

Então, é possível escrever um sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} \sqrt{3} = \dfrac{x}{y} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}y}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \dfrac{1}{3} = \dfrac{y}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 3y = 20 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10\sqrt{3}\ m \\ y = 10\ m \end{cases}$$

$$x = 10\sqrt{3}\ m \approx 17{,}3\ m$$

R: A altura da estação base é aproximadamente 17,3 metros.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir compreender o que representa a altura da base da estação no triângulo;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Equacionar o problema, compreendendo que como tem duas incógnitas precisamos de duas equações, logo um sistema de duas equações a duas incógnitas;
- Conseguir resolver o sistema;
- Manter nos cálculos intermédios o valor exato;
- Determinar o valor aproximado pedido.

O aluno poderá ainda não apresentar a resposta ao problema.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: “O que representa a altura da base da estação no triângulo que nos é apresentado?”; “Que nome tem esse comprimento?”.

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar:

– “Como posso obter o valor de ambas as incógnitas?”; “Dado que tenho duas incógnitas, quantas equações são precisas?”; “Como se chama este objeto matemático?”;
– “Como posso resolver o sistema?”; “Qual é o método que posso utilizar para a resolução do mesmo?”.

A professora deverá relembrar aos alunos que deverão manter nos cálculos intermédios os valores exatos das razões trigonométricas, tal como sugere o enunciado. É uma boa oportunidade para que a professora reforce que os alunos deverão ler os enunciados das questões com atenção.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

A professora deverá relembrar os alunos de que, sempre que o problema tem um contexto de realidade, eles deverão apresentar uma resposta ao mesmo.

Tarefa 5

Como α e β são ângulos complementares, temos:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} = sen\ \beta;\ cos\ \beta = \frac{a}{c} = sen\ \alpha$$

Logo:

$$cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$\boxed{\text{TdP}}$ ■

Demonstração alternativa:

Como α e β são ângulos complementares, temos:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} = sen\ \beta;\ cos\ \beta = \frac{a}{c} = sen\ \alpha$$

Logo:

$$cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = cos\alpha \times cos\alpha + sen\alpha \times sen\alpha$$
$$= \cos^2 \alpha + sen^2\alpha = 1 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{FFT}}$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir começar a demonstração;
- Perceber quais as razões que traduzem o seno e o cosseno de alfa;
- Compreender que deverá elevar ao quadrado cada uma das razões escritas anteriormente, e uma vez que se trata de uma fração, que deverá elevar ao quadrado tanto o numerador como o denominador;
- Conseguir escrever com o mesmo denominador o segundo membro da equação;
- Relacionar o que escreveu com o Teorema de Pitágoras e tendo em conta o triângulo representado.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá relembrar aos alunos que como se trata de uma demonstração temos de provar que a igualdade estabelecida é válida, e que para isso, os alunos não poderão utilizá-la durante a demonstração, terão de a deduzir.

A professora poderá perguntar: “Se me apresentam o triângulo com as medidas de comprimento dos lados e preciso de provar esta relação, como posso fazer?”; “Como posso escrever o seno de alfa?”; “E o cosseno?”;

A professora deverá chamar à atenção de toda a turma da importância da colocação dos parêntesis porque esse cuidado evita erros desnecessários. A professora poderá dar um exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq \frac{2^2}{3}$.

A professora poderá questionar: “Como é que se adicionam frações?”; “As frações já têm o mesmo denominador?”; “Se sim, o que preciso de fazer agora?”;

A professora poderá perguntar: “Consigo utilizar algum dos conhecimentos sobre triângulos retângulos para chegar ao resultado pretendido?”; “Como?”. Caso os alunos não consigam mobilizar o Teorema de Pitágoras, e se a professora achar necessário, recordá-lo-á em grande grupo. A professora poderá perguntar: “O que refere o Teorema de Pitágoras?”; “Então, já sei que o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Quais são os catetos e a hipotenusa neste triângulo?”; “Já consigo relacionar isso com a fração que tenho escrita?”.

3. 4.ª Questão-Aula **30 minutos**

Neste momento da aula, os alunos realizaram uma questão-aula (Anexo 9 deste relatório) como instrumento de avaliação sumativa e formativa, uma vez que as questões aula são um dos parâmetros da avaliação sumativa dos alunos, no entanto, será dado feedback à produção dos alunos, para que os eventuais erros não sejam repetidos na ficha de avaliação a realizar na semana seguinte.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os restantes exercícios da ficha de trabalho.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas. Será realizada uma questão aula.

Anexo 21 – Plano da aula 11

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professora-estagiária: Joana Dias

Data: 21/03/2019 **Ano:** 9.º Turma: B/C **Duração:** 90 minutos

LIÇÃO N.º: 112 e 113

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Entrega e correção da 4.ª Questão-Aula.
- Resolução de exercícios e problemas.
- Esclarecimento de dúvidas para o teste.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações daí decorrentes.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidação dos conteúdos lecionados.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas; Teorema de Pitágoras e seu recíproco; valores aproximados.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas dado que irão contactar com problemas em contextos matemáticos e/ou aplicados à realidade, tendo

de delinear uma estratégia eficiente para a sua resolução e saber dar a resposta de acordo com o contexto em questão;

- Desenvolver o raciocínio matemático uma vez que terão de ser capazes de justificar estratégias escolhidas e soluções apresentadas.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro).
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e tabelas trigonométricas; fichas de trabalho.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Entrega e correção da 4.ª Questão Aula. (30 minutos)
3. Resolução de exercícios e problemas. (55 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

2. Entrega e correção da 4.ª Questão-Aula. 20 minutos

Neste momento a professora irá entregar e corrigir a 4.ª Questão-aula. Durante a resolução, a professora aproveitará o momento para chamar a atenção dos alunos para os aspetos mais relevantes dos exercícios e problemas da questão aula, bem como os erros mais frequentes.

<u>Resolução da 4.ª Questão Aula</u>

Tarefa 1:

$$cos\,\hat{B} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow cos\,43° = \frac{10}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{10}{cos\,43°}$$

Então $\overline{AB} \approx 13{,}7\ cm$

Tarefa 2:

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{FE}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow tg\,\alpha = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

Então $\alpha \approx 22{,}6°$

Tarefa 3:

$$sen\, A\hat{D}B = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow sen\, 35° = \frac{\overline{AB}}{12} \Leftrightarrow \overline{AB} = 12 \times sen\, 35°$$

Então $\overline{AB} \approx 6{,}8829\, m$

$$cos\, B\hat{C}E = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}} \Leftrightarrow cos\, 68° = \frac{\overline{CB}}{13} \Leftrightarrow \overline{CB} = 13 \times cos\, 68°$$

Então $\overline{CB} \approx 4{,}8699\, m$

$$\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{CB} \approx 6{,}8829 - 4{,}8699 \approx 2{,}013\, metros$$

Tarefa 4:

a) Pela FFT temos:

$$sen^2\alpha + cos^2\, \alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos^2\alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow cos^2\, \alpha = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow cos^2\, \alpha = \frac{24}{25} \Leftrightarrow cos\, \alpha$$

$$= \pm\sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos\, \alpha = \pm\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{25}} \Leftrightarrow cos\, \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}, porque\ 0 < cos\, \alpha < 1$$

(o aluno poderá responder $cos\, \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$)

b)

Pela outra relação entre as razões trigonométricas, temos:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Logo,

$$tg\alpha = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{24}}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{24}}{24}$$

(o aluno poderá não racionalizar o denominador ou ainda apresentar a solução $tg\, \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$)

Tarefa 5:

O triângulo $[MNO]$ é retângulo em N e, relativamente ao ângulo MON, o lado $[ON]$ é o cateto adjacente e o lado $[OM]$ é a hipotenusa, pelo que, usando a definição de cosseno, temos:

$$cos\, M\hat{O}N = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow cos\, 56° = \frac{\overline{ON}}{2} \Leftrightarrow \overline{ON} = 2 \times cos\, 56°$$

Então $\overline{ON} \approx 2 \times 0{,}559 \approx 1{,}118\, m$

Assim, a distância da cadeira ao solo quando esta se encontra no ponto M é:

$$\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON} \approx 2{,}5 - 1{,}118 \approx 1{,}38\, metros$$

2. Resolução de exercícios e problemas **25 minutos**

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

Esta aula, tal como a anterior, terá por objetivo que os alunos consolidem os seus conhecimentos acerca das razões trigonométricas. Neste momento, a professora entregará aos alunos uma ficha de trabalho, onde foi feita uma compilação das questões aula aplicadas às restantes turmas do 9.ºano.

i. Resolução da ficha de trabalho n.º 15: **15 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos, e será realizada uma a uma à medida que a maioria dos alunos for terminando. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Algumas das tarefas aqui apresentadas, constam no plano anterior, uma vez que não foi cumprido. Nesse sentido, apenas se apresentam as resoluções das tarefas.

ii. Apresentação da Resolução: **10 minutos**

Tarefa 3

a) Tem-se $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ e $\overline{AE}^2 = 15^2 = 225$.

Assim, $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo $[ADE]$ é retângulo em D.

b) Uma vez que o triângulo é retângulo em D, como acabamos de provar, então $\hat{A} + \hat{E} = 90°$, isto é, são complementares. Logo, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do ângulo complementar.

c) Dado que o triângulo é retângulo, podemos aplicar as razões trigonométricas. Neste caso como temos todas as medidas de comprimento dos lados podemos aplicar qualquer uma das razões trigonométricas, logo:

$$sen\ \hat{A} = \frac{12}{15} \Leftrightarrow sen\ \hat{A} = 0{,}8 \Leftrightarrow \hat{A} = sen^{-1}(0{,}8), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Ou:

$$cos\ \hat{A} = \frac{9}{15} \Leftrightarrow cos\ \hat{A} = 0{,}6 \Leftrightarrow \hat{A} = cos^{-1}(0{,}6), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Ou:

$$tg\ \hat{A} = \frac{12}{9} \Leftrightarrow \hat{A} = tg^{-1}\left(\frac{12}{9}\right), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

d) Comecemos por determinar o lado $\overline{AC}$. Podemos reparar que $\overline{AB} = \overline{BE} = 7{,}5\ cm$.

$$cos\ \hat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow 0{,}6 = \frac{7{,}5}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7{,}5}{0{,}6}, \qquad então\ \overline{AC} = 12{,}5\ cm$$

Calculemos agora $\overline{DC}$:

$$\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = 12{,}5 - 9 = 3{,}500\ cm$$

Tarefa 4

Pelos dados temos:

$$tg\ \hat{B} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow tg\ 60° = \frac{x}{y}$$

Obtemos duas incógnitas, logo precisamos de duas equações:

$$tg\ \hat{A} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow tg\ 30° = \frac{x}{20 + y}$$

Então, é possível escrever um sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} \sqrt{3} = \dfrac{x}{y} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}y}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad - \\ \dfrac{1}{3} = \dfrac{y}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad - \\ 3y = 20 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad - \\ 2y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10\sqrt{3}\, m \\ y = 10\, m \end{cases}$$

$$x = 10\sqrt{3}\, m \approx 17{,}3\, m$$

R: A altura da estação base é aproximadamente 17,3 metros.

3. Esclarecimento de dúvidas **45 minutos**

Sendo a aula antes do teste, serão reservados estes 45 minutos da aula para que os alunos possam esclarecer as suas dúvidas, não só sobre a trigonometria, mas também sobre os temas da Probabilidade e Inequações. Caso não haja dúvidas ou estas não ocupem todo este momento da aula, a professora retomará a realização e correção da ficha de trabalho.

Tarefa 5

Como α e β são ângulos complementares, temos:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} = sen\ \beta;\ cos\ \beta = \frac{a}{c} = sen\ \alpha$$

Logo:

$$cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \quad \blacksquare$$

<u>Demonstração alternativa</u>:

Como α e β são ângulos complementares, temos:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} = sen\ \beta;\ cos\ \beta = \frac{a}{c} = sen\ \alpha$$

Logo:

$$cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = cos\alpha \times cos\alpha + sen\alpha \times sen\alpha$$
$$= \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

Tarefa 6

Distância percorrida é dada por: $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD}$

Amplitudes dos ângulos:

- $C\hat{A}D = 60°$
- $A\widehat{D}B = 20°$
- $A\hat{B}D = 180° - 20° - 60° = 100°$
- $C\hat{B}D = 180° - 100° = 80°$
- $C\widehat{D}B = 180° - 90° - 80° = 10°$

Pelos dados temos:

$$cos\ C\hat{A}D = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow cos\ 60° = \frac{\overline{AC}}{400} \Leftrightarrow \overline{AC} = 400 \times \frac{1}{2}$$

Então $\overline{AC} = 200$ metros

Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 200^2 + \overline{CD}^2 = 400^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 160000 - 40000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = \pm\sqrt{120000},$$

$$\overline{CD} > 0, porque\ \text{é}\ uma\ medida\ de\ comprimento$$

Então $\overline{CD} \approx 346{,}410$ metros

Ou,

$$sen\ C\hat{A}D = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow sen\ 60° = \frac{\overline{CD}}{400} \Leftrightarrow \overline{CD} = 400 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então $\overline{CD} \approx 346{,}410$ metros

Por outro lado,

$$cos\ C\widehat{D}B = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \Rightarrow cos\ 10° \approx \frac{346{,}410}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} \approx 351{,}754\ metros$$

E,

$$tg\ C\widehat{D}B = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \Rightarrow tg\ 10° \approx \frac{\overline{BC}}{346{,}410} \Rightarrow \overline{BC} \approx 61{,}081\ metros$$

Logo,

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} \approx 200 - 61{,}081 \approx 138{,}919\ m$$

$$\overline{BD} \approx 351{,}754\ m$$

$$\overline{AD} = 400\ m$$

Assim:

$$\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD} \approx 138{,}919 + 351{,}754 + 400 \approx 890{,}673$$
$$\approx 890{,}7\ metros$$

R: A distância percorrida neste percurso é aproximadamente 890,7 metros.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir compreender qual é a distância percorrida;
- Compreender quais as razões trigonométricas que relacionam as medidas de comprimento dadas com as medidas de comprimento pedidas;
- Conseguir isolar as incógnitas, nos diversos passos do problema;
- Mobilizar o Teorema de Pitágoras;
- Preservar nos cálculos intermédios as casas decimais necessárias;
- Determinar o resultado com o valor aproximado pedido.

O aluno poderá ainda não apresentar:

- A devida justificação para descartar a solução negativa advinda do Teorema de Pitágoras;
- A resposta ao problema.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar: "Como podemos calcular a distância percorrida no percurso?"; "Matematicamente, o que representa a soma destas distâncias?". É uma boa altura para que a professora relembra aos alunos que aquilo que está a ser calculado é o perímetro do triângulo.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar:

- "Como posso obter o comprimento do lado *CD*?"; "Se este é um triângulo retângulo, que conhecimento posso usar para me auxiliar a determinar esse lado?";

- “Onde se encontra a incógnita a isolar?”; “No numerador ou no denominador?”; “Se a incógnita se encontra no denominador, como a posso isolar?”; “Se a incógnita se encontra em numerador como a posso isolar?”;

A professora deverá:

- Relembrar aos alunos que deverão preservar nos cálculos intermédios pelo menos duas casas decimais a mais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, de forma a que este último seja o mais fidedigno possível;
- Sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos;
- Recordar aos alunos que sempre que tem duas soluções numa equação e num determinado contexto, como sucede neste, têm de descartar uma das duas, deverão sempre justificar a razão pela qual o fazem;
- Referir, ainda, que sempre que o problema tem um contexto de realidade os alunos deverão apresentar uma resposta ao mesmo, no final da resolução.

Tarefa 7

$$tg\ \hat{B} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow tg\ 30° = \frac{\overline{CA}}{6} \Leftrightarrow \overline{CA} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$P_{circunferência} = 2 \times \pi \times r$$

Podemos observar que o raio é $\overline{CA}$, logo:

$$P_C = 2 \times \pi \times 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \approx 21{,}7656 \approx 21{,}77\ u.c$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Mobilizar a fórmula do perímetro da circunferência;
- Compreender que o raio da circunferência é o comprimento *CA;*
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medidas de comprimento dada com a medida de comprimento pedida;
- Conseguir isolar a incógnita;

– Preservar nos cálculos intermédios as casas decimais necessárias;
– Determinar o resultado com o valor aproximado pedido.
– Apresentar as unidades de perímetro corretas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

– "Como podemos calcular o perímetro da circunferência?";
– "Já vimos que precisamos do raio da circunferência?"; "O que é um raio da circunferência?"; "Há algum comprimento que já esteja marcado e que represente o raio da circunferência?".

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Se o comprimento *CA* se encontra no numerador como se pode isolá-lo?".

A professora deverá relembrar aos alunos que deverão preservar nos cálculos intermédios pelo menos duas casas decimais a mais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, de forma que este último seja o mais fidedigno possível. No entanto, como o valor da amplitude do ângulo é a de um ângulo de referência, os alunos deverão deixar o seu valor exato.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

A professora poderá relembrar que como o cálculo efetuado é referente a um perímetro, deverá aparecer a unidade de perímetro correspondente, dado que não existem medidas no enunciado, os alunos deverão escrever simplesmente $u.c.$.

Tarefa 8

Queremos provar $sen\,\alpha \times \cos\alpha \times tg\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$sen\,\alpha \times \cos\alpha \times tg\,\alpha + \cos^2\alpha = sen\,\alpha \times \cos\alpha \times \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} + \cos^2\alpha =$$

$$= sen\,\alpha \times sen\,\alpha + \cos^2\alpha = sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir começar a demonstração;
- Perceber qual é a relação que envolve as três razões trigonométricas;
- Operar frações, nomeadamente com o seu produto;
- Mobilizar a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá relembrar aos alunos que como se trata de uma demonstração temos de provar que a igualdade estabelecia é válida, e que para isso, os alunos não poderão utilizá-la durante a demonstração, terão de a deduzir.

A professora poderá perguntar:

- "Qual é a relação entre as razões trigonométricas que envolve a tangente?"; "Então, onde está a tangente, posso escrever o quociente entre o seno e o cosseno do mesmo ângulo, certo?";
- "Como posso fazer o produto de um fator pelo outro, sendo que um deles é uma fração?"
- "$sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$?"; "Porquê?"; "Que relação permite concluir isto?".

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto que realizem os exercícios do manual e/ou do caderno de atividades que ainda não tenham realizado.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas. Será realizada uma questão aula.

Anexo 22 – Plano da aula 13

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 23/04/2019 **Ano:** 9.º Turma: B e C **Duração:** 45 minutos

LIÇÃO N.º: -

ALUNOS EM FALTA: -

SUMÁRIO:

– Determinar distância a locais inacessíveis: trabalho de grupo.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações daí decorrentes.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo em grupos.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidação dos conteúdos lecionados.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do grupo onde estão inseridos;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas dado que irão contactar com um problema em contextos de realidade, tendo de delinear uma estratégia eficiente para a sua resolução e saber dar a resposta de acordo com o contexto em questão;
- Desenvolver o raciocínio matemático uma vez que terão de ser capazes de justificar estratégias escolhidas e soluções apresentadas.

RECURSOS:

- Da professora: quadrantes, fitas métricas, máquina fotográfica, folhas de registo.
- Do aluno: calculadora científica.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário (5 minutos)
2. Saída para a rua para tirar as medidas necessárias. (20 minutos)
3. Regresso à sala para calcular a altura dos edifícios. (25 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. 5 minutos

Neste momento, para além da professora registar o sumário e faltas, pedirá que os alunos formem grupos de 4 e 5 elementos (conforme a constituição da turma e dos elementos presentes). Antes de saírem para a rua, a professora explicará a atividade que se irá realizar, distribuindo uma folha (em anexo neste plano) onde os alunos possam registar as medições necessárias para que a determinação das alturas dos edifícios/monumentos seja bem-sucedida.

2. Saída para a rua para tirar as medidas necessárias. 20 minutos

Depois dos grupos formados, as três professoras (a professora titular da turma e as professoras-estagiárias) sairão com os grupos para a rua. Cada professora ficará com um edifício/monumento do Colégio, e cada grupo de alunos irá para um edifício/monumento diferente.

A professora começará por explicar que o instrumento que lhes permitiria calcular o ângulo será o quadrante, fazendo uma breve explicação aos alunos sobre este instrumento e como deve ser feita a sua utilização. Para ajudar na realização da tarefa, a professora pedirá que os alunos observem o desenho que têm na sua folha de registo. A professora pedirá que um dos alunos se voluntarie para medir a amplitude do ângulo em questão, e que outro aluno observe que amplitude é essa.

Depois de os alunos registarem a amplitude do ângulo, a professora questionará acerca dos elementos que lhes faltam para conseguirem determinar a altura do edifício/monumento. Logo, os alunos deverão compreender que devem medir a distância até ao edifício/monumento, desde o ponto onde o aluno que segurou o quadrante para medir o ângulo. Por questões ligadas ao material disponível, nem todos os grupos poderão fazer esta medição utilizando fitas métricas, assim sendo, alguns grupos efetuarão esta medição através da quantidade de pés, ou seja, os alunos contabilizaram o número de pés desde o ponto onde mediram o ângulo até ao edifício/monumento, e posteriormente, será feita a sua conversão para metros.

A professora deverá tirar uma fotografia onde consiga enquadrar o aluno que segura no quadrante com o edifício, de forma a formar um triângulo, para que os alunos, no seu relatório, consigam reproduzir uma situação semelhante a que vêm ilustrada na folha de registo.

Assim que todos os elementos necessários para a medição do edifício/monumento sejam recolhidos, a turma retornará para a sala de aula, onde se seguirá a segunda parte deste trabalho.

3. Regresso à sala para calcular a altura dos edifícios 25 minutos

Já na sala de aula, com o auxílio da figura que acompanha a folha de registo e da calculadora científica, os alunos deverão atribuir valores aos diferentes comprimentos registados, e através do cálculo trigonométrico, obter a altura do edifício. Também na sala de aula medir-se-ão os alunos que utilizaram o quadrante para medir a amplitude do ângulo, pela altura dos olhos, e medir-se-ão os pés dos alunos que tinham determinado a distância até edifício/monumento, para que a conversão de pés para metros possa ser feita.

Ainda neste momento, será dado tempo para que os alunos possam fazer um relatório preliminar, onde expliquem todo o procedimento envolvido, e a razão pela qual optaram por determinada razão trigonométrica.

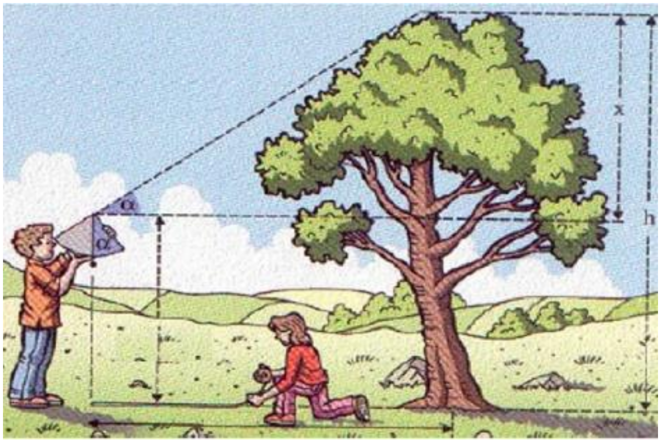
A professora deverá conferir os cálculos feitos. Posteriormente os alunos irão elaborar uma cartolina, onde colocarão os cálculos que realizaram, bem como o relatório e as fotografias disponibilizadas pela professora. Os trabalhos serão expostos num dos dias festivos do colégio: *Open Day*.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas constituídas para a realização do trabalho produzido pelos mesmos. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula dentro e fora da sala de aula. Será ainda avaliada a cartolina que os alunos produzirão. Nessa cartolina os alunos deverão descrever a atividade que fizeram e como a matemática permitiu solucionar o problema. Aspetos como a criatividade, a organização, o rigor, a apresentação, serão os critérios de avaliação.

ANEXOS:

Colégio Militar **ANO LETIVO** **2018/2019** Abril 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Folha de registo** **GRUPO:**_______________________________________ **N.º** ______________________________ **TURMA:**____



Edifício/Monumento _________________________________

- **Ângulo:** ______
- **Altura ao nível do olho de quem fez a medição: _______**
- **Distância/n.º de pés ao objeto: ____________**
- **Altura calculada: _____________**

Anexo 23 – Consentimento Informado

Estudar o uso de tarefas desafiantes e diferenciação pedagógica nas aulas de Matemática

Caro(a) Encarregado(a) de Educação,

A turma do seu educando foi selecionada para participar no *EDUCATE*, um projeto de investigação europeu do ERASMUS+ conduzido por uma equipa de investigadores de Portugal, Chipre, Grécia e Irlanda, que pretende estudar como o uso de tarefas matemáticas desafiantes no ensino da Matemática pode promover a aprendizagem de todos os alunos. Esta investigação é importante uma vez que, com base nos seus resultados, serão produzidos materiais para a formação de professores que podem ser usados por muitos professores e futuros professores em toda a União Europeia. *A participação do seu educando nesta investigação é voluntária e requer o seu consentimento.*

O que está envolvido na participação do meu educando nesta investigação?

A professora de Matemática do seu educando, Anabela Candeias, juntamente com as duas mestrandas do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa que estão a realizar a sua prática de ensino supervisionada no Colégio (Débora Ferrage e Joana Dias) irão gravar em vídeo algumas aulas nas próximas semanas. Embora o foco da observação recaia sobre as professoras em formação, o seu educando poderá também ser, ocasionalmente, captado na gravação dessas aulas.

Como é que os dados pessoais do meu educando serão salvaguardados?

A identidade pessoal do seu educando permanecerá totalmente confidencial. Alguns pequenos excertos de vídeo das aulas serão visionados num contexto restrito com os professores em formação e os formadores, com a intenção de apoiar a reflexão dos formandos sobre a prática de ensino da Matemática.

A participação do meu educando nesta investigação é obrigatória?

A participação do seu educando nesta investigação é voluntária. ***Para indicar se dá o seu consentimento à participação do seu educando, por favor, preencha o formulário de resposta, em anexo, e devolva-o à professora de Matemática***. Note-se que os alunos que não desejem participar na investigação serão colocados fora do alcance da câmara quando as aulas de Matemática estiverem a ser gravadas.

Muito apreciaríamos a sua resposta positiva, uma vez que consideramos que este estudo pode contribuir para compreender como os professores podem ensinar Matemática de uma forma adequada a todos os alunos e promotora de uma aprendizagem de qualidade. Consequentemente, acreditamos que a concretização da investigação e as sugestões e os materiais curriculares daí decorrentes, poderão contribuir para a qualidade do ensino da Matemática no nosso país, assim como promover as aprendizagens de todos os alunos nesta disciplina. O seu educando também será informado e solicitado a aceitar em participar do estudo.

Como poderei saber mais acerca desta investigação?

Para mais informação sobre a participação do seu educando nesta investigação, por favor, contacte o coordenador nacional do projeto:

Prof. Dr. João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade
1649-013 Lisboa

Tel.: 21 794 37 77 Email: jpponte@ie.ulisboa.pt

Para alguma reclamação sobre esta investigação ou se pretender em qualquer momento anular o presente consentimento, entre em contato com o Prof. Dr. João Pedro da Ponte (detalhes de contacto acima).

Nota importante

Este projeto, intitulado “Melhorar o ensino diferenciado e a ativação cognitiva em aulas de matemática através da formação de professores (EDUCATE)” foi financiado com o apoio da Comissão Europeia.

Estudar o uso de tarefas desafiantes e diferenciação pedagógica nas aulas de Matemática

Consentimento do(a) Encarregado(a) de Educação

Declaro que li e compreendi a descrição do projeto de investigação EDUCATE. Estou informado que a participação do meu educando é voluntária e autorizo a sua participação no projeto de investigação no ano letivo de 2018-2019. Tomei conhecimento que o nome do meu educando não irá aparecer em nenhuma publicação e que os dados registados em vídeo irão ser mantidos num arquivo seguro e serão usados apenas para propósitos da investigação e na formação de professores.

Finalmente, compreendo que, se tiver alguma questão sobre a investigação, poderei contactar o Prof. Dr. João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Se em algum momento eu tiver quaisquer comentários sobre o projeto ou questões sobre os direitos do meu educando como participante no estudo, posso entrar em contato com a pessoa acima mencionada. Para além disso, compreendo que posso retirar o meu educando do estudo, em qualquer momento e sem qualquer consequência. Para tal, deverei entrar em contato com o Prof. Dr. João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Por favor, colocar um "X" na caixa abaixo; depois devolver esta página e manter as duas primeiras páginas para seu próprio registo:

☐ **<u>Dou</u>** o meu consentimento para o meu educando ser gravado em vídeo em algumas aulas de matemática e para o vídeo poder ser usado para investigação e na formação de professores no âmbito do projeto EDUCATE.

☐ **<u>Não dou</u>** o meu consentimento para o meu educando ser gravado no âmbito do projeto EDUCATE.

Nome do aluno: ____

Nome do Encarregado de Educação: ______________________________

Assinatura do Encarregado de Educação: __________________________

Data: ______________________ Escola: ______________________

Nome do(a) Professor(a): ______________________________________